BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Pendahuluan

Hsieh (1985, hal 3) mengemukakan bahwa pada kenyataannya tidak ada suatu struktur yang betul-betul datar tetapi di dalam kebanyakan analisis struktur seperti balok-balok, jembatan rangka, atau bangunan-bangunan biasanya dianggap sebagai masalah-masalah bidang datar walaupun mereka sebetulnya tidak pernah ada yang berdimensi dua. Pada beberapa struktur seperti menara dan kerangka kubah, barulah struktur dianalisis sebagai bidang ruang dengan sistem pembebanan tidak dalam satu bidang, karena struktur-struktur tersebut tidak dapat disederhanakan berdasarkan struktur yang mempunyai komponen-komponen yang terletak pada bidang datar.

Weaver (1986, hal 1) mengemukakan bahwa metoda untuk menganalisis struktur rangka ada dua macam yaitu metoda gaya (*force / flexibility method*) dan metoda kekakuan (*stiffness / displacement method*). Metoda gaya merupakan perluasan dari metoda *Maxwell-Mohr*, metoda ini tidak sesuai untuk dikomputerisasi, tetapi bermanfaat untuk perhitungan dengan tangan. Lain halnya dengan metoda gaya, metoda kekakuan yang juga dikenal sebagai metoda perpindahan lebih mudah untuk diprogram ke dalam komputer.

Pemilihan metoda analisa tergantung pada persoalan yang ditinjau dan juga digunakan atau tidaknya komputer. Metode perpindahan umumnya lebih cocok untuk dibuat program komputernya (Ghali, A. dan Neville, A.M., 1986, hal 73).

2.2. Teori Dasar Struktur Rangka

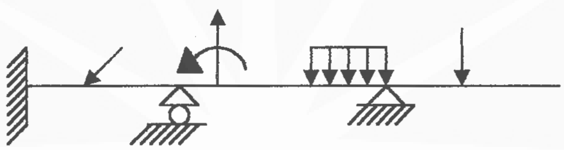
Secara umum struktur yang dimaksud dalam analisis struktur adalah struktur rangka terbuka. Struktur rangka terbuka itu sendiri dibagi menjadi enam kategori (Weaver, 1986, hal 1), yaitu: balok menerus, rangka batang bidang, rangka batang ruang, balok silang, portal bidang, dan portal ruang, masing-masing jenis struktur ini mempunyai ciri-ciri sendiri.

Setiap struktur rangka terdiri dari batang-batang yang panjangnya jauh lebih besar dibandingkan dengan ukuran penampang lintangnya.Titik kumpul (*joint*) struktur dapat berupa titik pertemuan batang, tumpuan maupun ujung bebas (Weaver, 1986, hal 1). Tumpuan pada struktur rangka dapat berupa jepit, sendi atau rol, dan dalam kondisi tertentu tumpuan dapat bersifat elastis (semi kaku).

Titik kumpul dapat merupakan pertemuan yang sifatnya kaku (*rigid*), dapat juga merupakan pertemuan engsel (sendi). Pada struktur balok menerus, portal bidang, dan portal ruang, pertemuan antara batang-batang merupakan pertemuan yang kaku, sedangkan pada struktur rangka batang bidang dan rangka batang ruang, *joint* merupakan pertemuan sendi (Hariandja, 1996, hal 39). Sehingga pada struktur rangka batang (*truss*) baik bidang maupun ruang, gaya-gaya dalam elemen yang terjadi hanya gaya aksial saja, sedangkan gaya-gaya yang terjadi pada struktur balok maupun portal bidang dan portal ruang, gaya-gaya dalam elemen yang terjadi dapat berupa gaya aksial, momen lentur, gaya geser, dan torsi.

a. Balok menerus

Balok adalah suatu batang lurus dengan satu atau lebih tumpuan terpusat seperti terlihat pada gambar 2.1. Gaya luar pada balok menerus dianggap bekerja dalam bidang yang melalui sumbu simetri penampang lintangnya (sumbu simetri juga merupakan sumbu utama penampang lintang). Selain itu, vektor momen kopel yang bekerja pada balok tegaklurus bidang ini, serta balok melendut dalam bidang yang sama (bidang lentur) dan tidak terpuntir. Penampang lintang balok dapat mengalami resultante tegangan dalam yang secara umum bisa berupa gaya aksial, gaya geser, dan momen lentur (Weaver, 1986, hal 2).

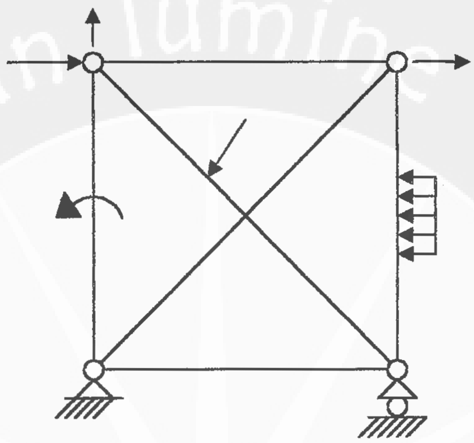


Gambar 2.1 Balok menerus

b. Rangka batang bidang

Rangka batang bidang merupakan himpunan batang yang sebidang dan bersambungan sendi di titik kumpulnya seperti terlihat pada gambar 2.2. Semua gaya luar dianggap bekerja dalam bidang struktur, dan vektor momen seluruh kopel tegak lurus bidang tersebut seperti pada balok.

Beban pada rangka batang bidang bisa terdiri dari gaya terpusat yang diberikan di titik kumpul dan beban yang bekerja pada batang. Untuk tujuan analisis, beban terakhir ini boleh diganti dengan beban yang ekivalen secara statis dan bekerja di titik kumpul. Jika rangka batang hanya memikul beban di titik kumpul, maka batangnya hanya mengalami gaya aksial tarik atau tekan. Sedang bila beban bekerja langsung pada suatu batang, maka selain gaya aksial, batang tersebut akan mengalami momen lentur dan gaya geser (Weaver, 1986, hal 2).

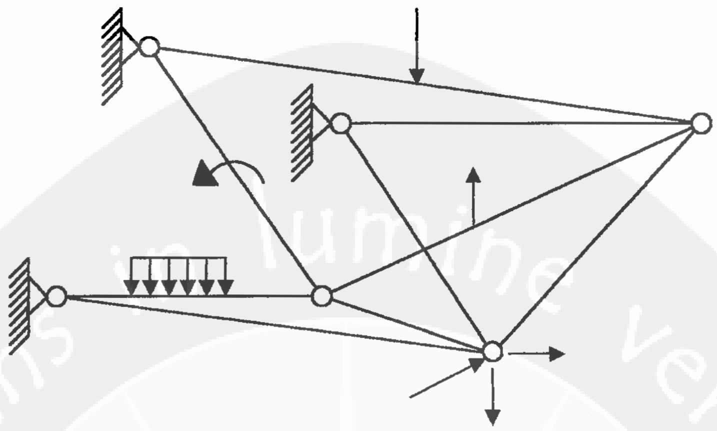


Gambar 2.2 Rangka batang bidang

c. Rangka batang ruang

Pada prinsipnya rangka batang ruang sama dengan rangka batang bidang, kecuali bahwa batang-batangnya berarah sembarang dalam ruang seperti terlihat pada gambar 2.3.

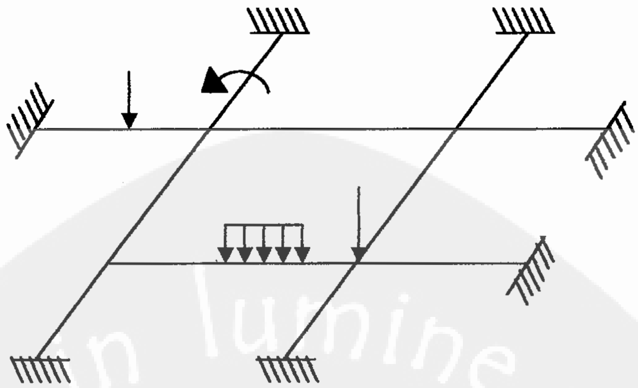
Pada rangka batang ruang, gaya yang bekerja boleh berarah sembarang, tetapi vektor momen suatu kopel yang bekerja pada suatu batang harus tegaklurus terhadap sumbu batang tersebut. Syarat ini disebabkan batang pada rangka batang tidak mampu menahan puntir (Weaver, 1986, hal 2).



Gambar 2.3 Rangka Batang Ruang

d. Balok silang

Balok silang merupakan struktur bidang yang dibentuk oleh beberapa balok menerus yang saling bertemu atau bersilangan seperti terlihat pada gambar 2.4. Berbeda dengan rangka batang bidang yang gaya luarnya berada dalam bidang struktur, gaya luar pada balok silang tegaklurus bidang struktur. Vektor momen semua momen kopel berada dalam bidang balok silang. Arah beban seperti ini dapat menimbulkan puntir dan lenturan pada sejumlah batang. Penampang lintang setiap batang pada balok menerus dianggap memiliki dua sumbu simetri, sehingga lenturan dan puntir tidak saling bergantungan (Weaver, 1986, hal 2).

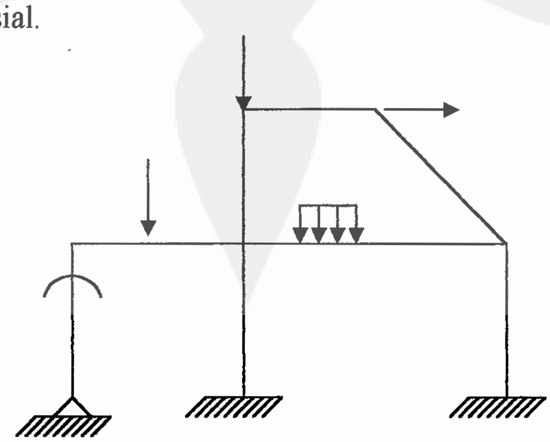


Gambar 2.4 Balok silang

e. Portal bidang

Portal bidang dibentuk oleh batang-batang dengan sumbu simetri yang terletak pada satu bidang sama seperti pada balok menerus seperti terlihat pada gambar 2.5. Titik kumpul batang pada portal bidang merupakan sambungan kaku.

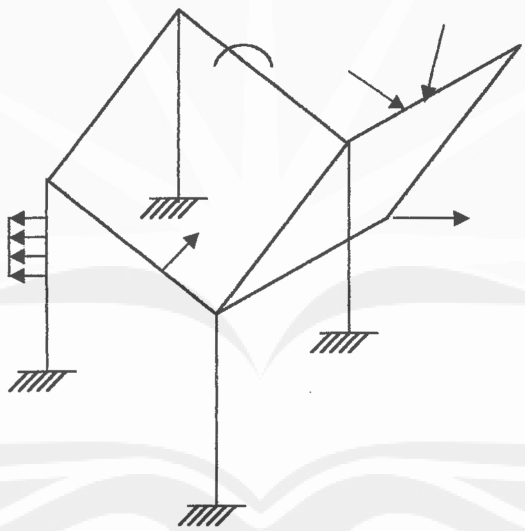
Pada portal bidang, gaya yang bekerja dan translasinya terletak pada bidang struktur sedangkan vektor momen semua kopel luar pada portal tegaklurus bidang tersebut (Weaver, 1986, hal 2). Resultante tegangan dalam di suatu penampang batang portal bidang secara umum terdiri dari momen lentur, gaya geser dan gaya aksial.



Gambar 2.5 Portal bidang

f. Portal ruang

Portal ruang seperti terlihat pada gambar 2.6, merupakan jenis struktur rangka yang paling umum karena letak titik kumpul, arah batang, atau arah bebannya tidak dibatasi. Setiap batang portal ruang dapat memikul gaya aksial, momen puntir, momen lentur dalam kedua arah sumbu utama penampang lintang, dan gaya geser dalam kedua arah sumbu utama (Weaver, 1986, hal 3). Penampang lintang batang dianggap memiliki dua sumbu, seperti pada kasus balok silang.



Gambar 2.6 Portal ruang

2.3. Batang Tak Prismatis

Batang tak prismatis dapat dikelompokkan (Kardestuncer,1974, hal 320) menjadi :

a. Batang tak prismatis umum

Batang tak prismatis umum mempunyai ketinggian yang bervariasi dari satu ujung ke ujung yang lainnya. Batang tak prismatis umum ini dapat diselesaikan dengan metode integral.

b. Batang tak prismatis lengkung

Batang tak prismatis lengkung mempunyai bentuk penampang melintang yang tetap. Contoh batang tak prismatis lengkung adalah penampang berbentuk bundar, elips, parabola, dll. Batang tak prismatis lengkung dapat diselesaikan dengan membagi bagian lengkung tanpa mempedulikan bentuknya menjadi segmen lurus dan menentukan pendekatan matriks fleksibilitas sebagai sebuah bagian hubungan seri.

c. Tapered members

Tapered members mempunyai tinggi batang yang linier dari ujung satu ke ujung yang lain. *Tapered members* dapat diselesaikan dengan membagi panjang batang menjadi beberapa segmen yang sama panjangnya, kemudian momen inertia pada bagian tengah segmen diambil sebagai momen inertia yang mewakili segmen tersebut.

d. Stepped members

Stepped members adalah batang yang mempunyai perubahan tinggi yang bertingkat.

2.4. Teori Dasar Analisis Elastis

Dalam analisis linear statis, diasumsikan bahwa perpindahan (translasi maupun rotasi) adalah linear terhadap beban yang bekerja, sehingga setiap penambahan perpindahan selalu bersifat proporsional terhadap gaya yang menyebabkannya. Semua deformasi diasumsikan kecil, sehingga hasil dari perpindahan tidak selalu mempengaruhi geometri dari struktur dan tidak mengubah gaya-gaya pada setiap bagian struktur (Ghali, 1986, hal 1). Pada umumnya struktur didesain untuk mengalami deformasi kecil dan linear. Analisis elastis mengarah pada perilaku terhadap beban kerja. Suatu analisis yang obyektif dari sebuah struktur adalah untuk menentukan gaya dalam, tegangan dan perpindahan yang diakibatkan oleh beban yang diberikan. Gaya-gaya tersebut harus memenuhi kondisi kesetimbangan dan menghasilkan deformasi yang kompatibel dengan kontinuitas struktur dan syarat tumpuan. Sehingga setiap metoda analisis elastis akan memberikan kepastian bahwa kedua kondisi tersebut baik kesetimbangan maupun kompabilitasnya terpenuhi. Ada dua macam metoda yang secara umum dapat digunakan yaitu metoda gaya dan metoda kekakuan.

a. Metoda gaya (*force / flexibility method*)

Pada metoda ini, gaya-gaya kelebihan (*redundant force*) dipilih sebagai besaran yang tidak diketahui. Pembebasan-pembebasan yang cukup disediakan dengan memindahkan gaya-gaya kelebihan, dimana jumlahnya sama dengan derajat statis tak tentu, untuk mendapatkan sebuah struktur statis tertentu yang disebut struktur utama. Struktur utama tersebut mengalami deformasi yang tidak tetap dan ketidaktetapan dalam geometri tersebut kemudian dikoreksi dengan gaya-gaya kelebihan (Ghali, 1986, hal 12). Nilainya kemudian dihitung dari kondisi kompatibel. Setelah gaya-gaya kelebihan diketahui, semua gaya-gaya dalam, tegangan dan perpindahan ditentukan dengan superposisi dari efek-efek gaya luar dan gaya kelebihan.

b. Metoda kekakuan (*stiffness / displacement method*)

Pada metoda ini, penahan-penahan diberikan untuk mencegah perpindahan dari titik kumpul. Kemudian gaya-gaya yang dibutuhkan untuk menghasilkan penahan tersebut ditentukan. Perpindahan titik kumpul dipilih sebagai besaran yang tidak diketahui. Dalam analisis perpindahan tersebut ditentukan dari kondisi kesetimbangan. Setelah perpindahan titik kumpul diketahui, semua gaya-gaya dalam dan tegangan dapat ditentukan.

Analisis dalam metoda gaya membutuhkan serangkaian penyelesaian persamaan linear simultan, di mana jumlahnya sama dengan gaya-gaya kelebihan yang tidak diketahui, yaitu derajat struktur statis tak tentu (Ghali, 1986, hal 20). Sedangkan pada metoda kekakuan jumlah perpindahan titik kumpul yaitu derajat kinematis tertentu. Di dalam memilih metoda analisis, ada dua hal yang perlu dipertimbangkan yaitu masalah formulasi dan penyelesaiannya. Formulasi dalam metoda gaya bergantung pada pemilihan gaya-gaya kelebihan. Banyak kemungkinan yang dapat diambil, sehingga untuk menentukan pilihan bukanlah hal yang mudah. Sedangkan pada metoda kekakuan, perpindahan-perpindahan titik kumpul struktur ditentukan secara otomatis. Jadi jumlah yang tak diketahui dalam metoda kekakuan sama dengan derajat ketidaktentuan kinematis struktur (Weaver, 1986, hal 109). Keadaan ini menyebabkan metoda kekakuan mudah diformulasikan dan lebih sesuai untuk pemakaian komputer. Dalam tugas akhir ini selanjutnya memakai metoda kekakuan untuk menganalisis batang tak prismatis pada portal bidang.

2.5. Teori Dasar Metoda Kekakuan (*Displacement Method*)

2.5.1. Konsep dasar

Untuk sebuah struktur rangka, deformasi yang diakibatkan oleh suatu kondisi pembebanan tertentu dapat diwakili oleh perpindahan-perpindahan pada titik-titik ujung, dan deformasi pada titik-titik ujung yang lain dapat dihitung melalui perpindahan tersebut. Vektor dari perpindahan itu disebut derajat kebebasan global.

Untuk suatu bagian struktur, deformasi yang diakibatkan oleh suatu kondisi pembebanan tertentu dapat diwakili dengan perpindahan sejumlah arah pada ujung dari bagian struktur tersebut, sehingga vektor dari perpindahan bebas itu disebut derajat kebebasan lokal. Perpindahan pada titik simpul dan gaya pada ujung setiap bagian struktur adalah berupa vektor, sehingga suatu sistem koordinat diperlukan untuk suatu aplikasi komputer.

Matriks kekakuan batang dalam sistem koordinat lokal $[S_M]$ dapat diperoleh dari mekanika material untuk rangka dan portal. Sedangkan matriks kekakuan batang dalam sistem koordinat global $[S_{MS}]$ diperoleh melalui suatu transformasi koordinat (Weaver, 1986, hal 229).

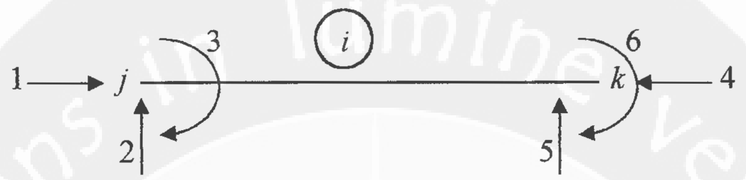
$$[S_{MS}] = [R_T]^T . [S_M] . [R_T] \qquad (2\text{-}1)$$

dimana $[R_T]$ adalah matriks transformasi rotasi, yang mentransformasikan sistem koordinat lokal ke sistem koordinat global.

2.5.2. Metoda kekakuan untuk analisis portal bidang

2.5.2.1. Derajat kebebasan.

Untuk suatu batang pada portal bidang, terdapat 6 derajat kebebasan, seperti terlihat pada gambar 2.7.



Gambar 2.7 Derajat Kebebasan Lokal untuk Portal Bidang

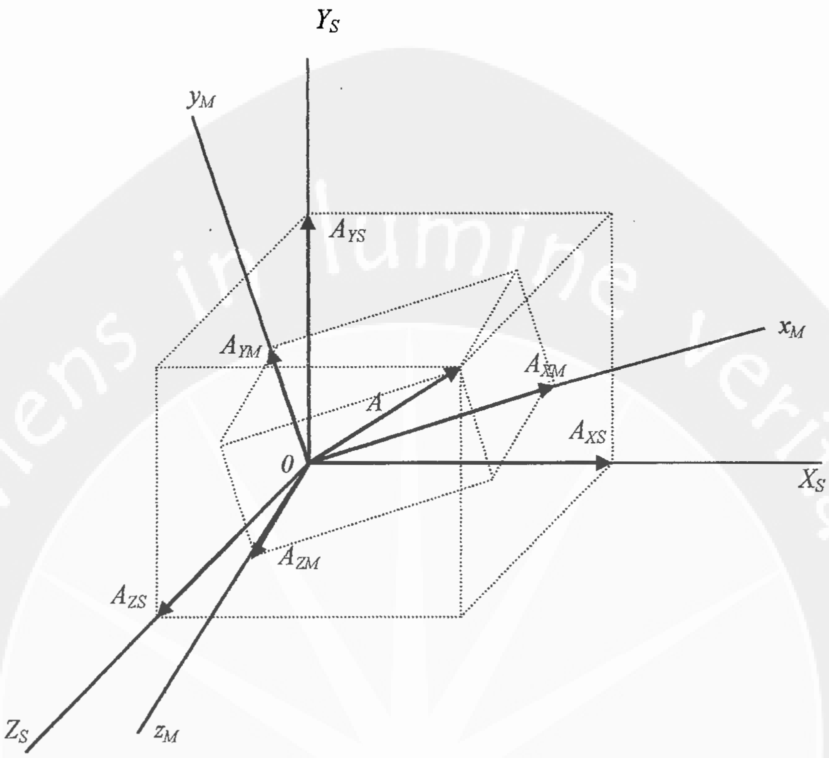
Tanda panah pada gambar 2.7 menyatakan translasi. Translasi di titik kumpul *j* diberi nomor 1 dan 2 dan rotasi diberi nomor 3, dan translasi di titik kumpul *k* diberi nomor 4 dan 5 dan rotasi diberi nomor 6.

2.5.2.2. Matriks kekakuan batang lokal.

Matriks kekakuan batang dalam sistem koordinat lokal $[S_M]$ pada gambar 2.7 dapat dirumuskan sebagai berikut (Weaver, 1986, hal 228) :

$$[S_M]=\begin{bmatrix} S_{Mjj} & S_{Mjk} \\ S_{Mkj} & S_{Mkk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

2.5.2.3. Matriks rotasi.



Gambar 2.8 Rotasi Sumbu dalam Tiga Dimensi

Pada gambar 2.8 dilihat bahwa aksi A dapat diuraikan dalam tiga komponen A_{XS}, A_{YS} dan A_{ZS}, alternatif lainnya, A diuraikan dalam tiga komponen A_{XM}, A_{YM} dan A_{ZM} pada arah X_M, Y_M dan Z_M. Tiga komponen terakhir ini dapat dinyatakan dalam tiga komponen sebelumnya dengan inspeksi geometri pada gambar 2.8, persamaannya adalah

$$A_{XS} = A_{XM} \cos \gamma - A_{YM} \sin \gamma$$

$$A_{YS} = A_{XM} \sin \gamma + A_{YM} \cos \gamma$$

Pada portal bidang, sumbu batang diputar dari sumbu struktur terhadap sumbu z_M sebesar γ, maka :

$$A_{ZS} = A_{ZM}$$

atau

$$A_{XM} = A_{XS} \cos\gamma + A_{YS} \sin\gamma$$

$$A_{YM} = -A_{XS} \sin\gamma + A_{YS} \cos\gamma$$

$$A_{ZM} = A_{ZS} \qquad (2\text{-}3)$$

Jika diubah ke dalam bentuk matriks, persamaannya menjadi

$$\begin{Bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \\ A_{ZM} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \\ A_{ZS} \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}4)$$

Persamaan (2-4) dapat diringkas sebagai berikut (Weaver, 1986, hal 226) :

$$\{A_M\} = [R] \, . \, \{A_S\} \qquad (2\text{-}5)$$

dengan A_M adalah vektor yang terdiri dari komponen aksi A yang sejajar dengan sumbu X_M, Y_M dan Z_M, dan A_S adalah vektor yang berisi komponen aksi A yang sejajar sumbu X_S, Y_S dan Z_S, sedang R adalah matriks kosinus arah yang disebut matriks rotasi.

Sebelum mendapatkan matriks kekakuan global maka terlebih dulu dibentuk matriks rotasinya $[R]$ sebagai berikut (Weaver, 1986, hal 229) :

$$[R] = \begin{bmatrix} Cx & Cy & 0 \\ -Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}6)$$

$$C_Y = \frac{y_k - y_j}{L} \qquad C_X = \frac{x_k - x_j}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \qquad (2\text{-}7)$$

dengan Cx dan Cy adalah kosinus arah x dan y suatu batang, L adalah panjang batang, x_j dan y_j adalah koordinat ujung j pada suatu batang, x_k dan y_k adalah koordinat ujung k suatu batang.

2.5.2.4. Matriks kekakuan batang global.

Setelah matriks rotasi sudah terbentuk maka selanjutnya dibentuk matriks transformasi rotasi $[R_T]$ untuk batang pada portal bidang sebagai berikut

$$[R_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \tag{2-8}$$

Kemudian matriks kekakuan batang global dihitung dengan perkalian berikut ini

$$[S_{MS}] = [R_T]^T \,.\, [S_M] \,.\, [R_T] \tag{2-9}$$

2.5.3. Persamaan aksi untuk analisis portal bidang

Persamaan aksi untuk analisis portal bidang merupakan persamaan linear yang terdiri dari vektor beban / aksi gabungan $\{A_C\}$ yang terdiri dari beban titik kumpul $\{A_J\}$ dan beban batang yang diganti dengan titik ekivalen $\{A_E\}$, vektor perpindahan $\{D_J\}$, dan matriks kekakuan titik $[S_J]$ yang dibentuk dari matriks kekakuan batang $[S_{MS}]$, dengan hubungan seperti di bawah ini :

$$\{A_C\} = [S_J] \,.\, \{D_J\} \tag{2-10}$$

Bila persamaan (2-8) diekspansi, akan diperoleh

$$\begin{Bmatrix} A_{FC} \\ A_{RC} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{FF} & S_{FR} \\ S_{RF} & S_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_F \\ D_R \end{Bmatrix} \tag{2-11}$$

Dalam Persamaan ini, subkrip F dan R masing-masing menunjukkan perpindahan bebas dan terkekang.

Pada persamaan (2-9), matriks kekakuan titik dan vektor gaya / beban serta vektor perpindahan sudah ditata ulang, sehingga penyelesaian dasar untuk perpindahan titik kumpul bebas $\{D_F\}$ adalah (Weaver, 1986, hal 170) :

$$\{D_F\} = \lfloor S_{FF}^{-1} \rfloor \{A_{FC}\} \tag{2-12}$$

dalam persamaan ini $\{A_{FC}\}$ adalah vektor beban titik kumpul gabungan yang selaras dengan $\{D_F\}$.

Setelah perpindahan titik kumpul bebas $\{D_F\}$ dihitung, reaksi tumpuan $\{A_R\}$ dapat diperoleh sebagai berikut (Weaver, 1986, hal 171) :

$$\{A_R\} = -\{A_{RC}\} + [S_{RF}] \cdot \{D_F\} \tag{2-13}$$

Gaya batang $\{A_M\}$ dapat dihitung sebagai berikut (Weaver, 1986, hal 235) :

$$\{A_{Mi}\} = \{A_{MLi}\} + [S_{MSi}] \cdot [R_{Ti}] \cdot \{D_{Ji}\} \tag{2-14}$$

dengan $\{A_{ML}\}$ adalah gaya di ujung batang terkekang akibat beban pada batang.