BAB III

MATRIKS KEKAKUAN DAN GAYA JEPIT UJUNG BATANG TAK PRISMATIS

3.1. Umum

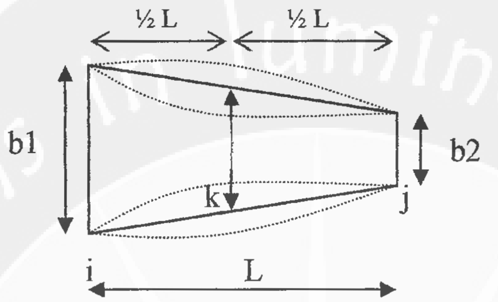
Permasalahan utama pada tugas akhir ini adalah menurunkan matriks kekakuan batang tak prismatis yang akan digunakan pada portal bidang dan penurunan formulasi gaya jepit ujung batang untuk batang tak prismatis. Matriks kekakuan pada portal bidang dibentuk dari penurunan dua jenis matriks kekakuan, yaitu dari elemen aksial yang mengalami translasi searah sumbu X, dan dari elemen geser dan lentur yang memiliki dua perpindahan yaitu translasi searah sumbu Y dan rotasi terhadap sumbu Z. Selain itu diperlukan persamaan untuk menghampiri lebar dan tinggi batang tak prismatis, yang pada tugas akhir ini dihampiri menggunakan persamaan polinomial. Sedangkan untuk penurunan formulasi gaya jepit ujung digunakan penerapan metode kolom analogi.

3.2. Rumus Umum Lebar Batang Tak Prismatis

Langkah pertama untuk mendapatkan matriks kekakuan adalah mencari rumus umum lebar batang tak prismatis b yang dapat dilihat pada gambar 3.1. Rumus umum $b = b(x)$ dihampiri dengan persamaan polinomial $b \approx d + e\,x + f\,x^2$, yang tergantung pada variabel lebar batang pada ujung i (b_1), lebar batang pada ujung j (b_2), lebar batang pada tengah-tengah batang (b_3) dan panjang batang (L). Rumus umum lebar batang tak prismatis adalah

$$b = d + ex + fx^2 \tag{3-1}$$

Konstanta *d, e* dan *f* harus dicari menggunakan syarat batas :



Gambar 3.1 Pemodelan Lebar Batang tak Prismatis

Pada $x = 0 \quad \rightarrow \quad b = b_1 \rightarrow d = b_1$ (3-2)

Pada $x = ½ L \quad \rightarrow \quad b = d + ½\, e\, L + ¼\, f\, L^2$

$$b_3 = b1 + ½\, e\, L + ¼\, f\, L^2 \tag{3-3}$$

Pada $x = L \quad \rightarrow \quad b_2 = b_1 + e\, L + f\, L^2$ (3-4)

Sistem persamaan simultan (3-3) dan (3-4) memberikan :

$$f = \frac{2\,(b_1 + b_2 - 2\,b_3)}{L^2} \quad \text{dan} \quad e = \frac{-3\,b_1 - b_2 + 4\,b_3}{L} \tag{3-5}$$

Sehingga didapat persamaan umum untuk tinggi :

$$b = b_1 + \frac{-3\,b_1 - b_2 + 4\,b_3}{L}x + \frac{2\,(b_1 + b_2 - 2\,b_3)}{L^2}x^2 \tag{3-6}$$

Jika : $u = 2\,(b_1 + b_2 - 2\,b_3)$ (3-7)

Maka : $-3\,b_1 - b_2 + 4\,b_3 = -(2\,b_1 + 2\,b_2 - 4\,b_3 + b_1 - b_2) = -(b_1 - b_2 + u)$

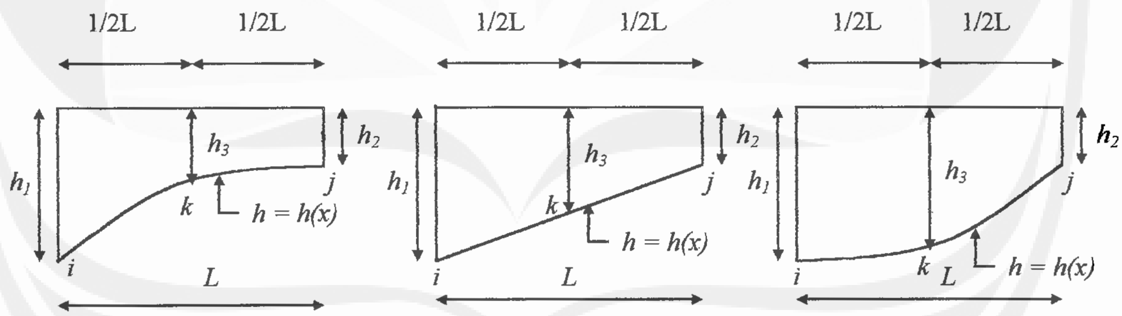
Jika : $v = (b_1 - b_2 + u)$ (3-8)

maka persamaan umum untuk lebar menjadi :

$$b = b_1 - v\frac{x}{L} + u\frac{x^2}{L^2} \tag{3-9}$$

3.3. Rumus Umum Tinggi Batang Tak Prismatis

Setelah mendapatkan rumus umum untuk lebar batang tak prismatis, langkah berikutnya adalam mencari suatu rumus umum tinggi batang tak prismatis atau h yang dapat dilihat pada gambar 3.2. Rumus umum $h = h(x)$ dihampiri menggunakan persamaan polinomial $h \approx a + b\ x + c\ x^2$, yang tergantung pada variabel tinggi batang pada ujung j (h_1), tinggi batang pada ujung k (h_2), tinggi batang pada tengah-tengah batang (h_3) dan panjang batang (L).



Gambar 3.2 Pemodelan Tinggi Batang tak Prismatis

Rumus umum tinggi batang tak prismatis adalah

$$h = a + bx + cx^2 \tag{3-10}$$

Konstanta a, b dan c dari persamaan (3-9) dicari menggunakan syarat batas :

Pada $x = 0 \quad \rightarrow \quad h = h_1 \rightarrow a = h_1$ (3-11)

Pada $x = ½\,L \quad \rightarrow \quad h = a + ½\,b\,L + ¼\,c\,L^2$

$$h_3 = h1 + \tfrac{1}{2}\, b\, L + \tfrac{1}{4}\, c\, L^2 \tag{3-12}$$

Pada $x = L$ $\rightarrow$ $h_2 = h_1 + b\,L + c\,L^2$ (3-13)

Sistem persamaan simultan (3-11) dan (3-12) memberikan :

$$c = \frac{2\,(h_1 + h_2 - 2\,h_3)}{L^2} \quad \text{dan} \quad b = \frac{-3\,h_1 - h_2 + 4\,h_3}{L} \tag{3-14}$$

Sehingga didapat persamaan umum untuk tinggi :

$$h = h_1 + \frac{-3\,\mathrm{h}_1 - h_2 + 4\,\mathrm{h}_3}{L}\,x + \frac{2\,(\mathrm{h}_1 + \mathrm{h}_2 - 2\,\mathrm{h}_3)}{L^2}\,x^2 \tag{3-15}$$

Jika : $p = 2\,(h_1 + h_2 - 2\,h_3)$ (3-16)

Maka : $-3\,h_1 - h_2 + 4\,h_3 = -(2\,h_1 + 2\,h_2 - 4\,h_3 + h_1 - h_2) = -(h_1 - h_2 + p)$

Jika : $q = (h_1 - h_2 + p)$ (3-17)

maka persamaan umum untuk tinggi menjadi :

$$h = h_1 - q\,\frac{x}{L} + p\,\frac{x^2}{L^2} \tag{3-18}$$

$$I = 1/12\,.\,b\,.\,h^3$$

$$\begin{aligned} h^3 = {} & h_1^3 - 3\,h_1^2\,q\,\frac{x}{L} + (3\,h_1\,q^2 + 3\,p\,h_1^2)\,\frac{x^2}{L^2} - (q^3 + 6\,p\,h_1\,q)\,\frac{x^3}{L^3} + \\ & (3\,p\,q^2 + 3\,p^2\,h_1)\,\frac{x^4}{L^4} - 3\,p^2\,q\,\frac{x^5}{L^5} + p^3\,\frac{x^6}{L^6} \end{aligned} \tag{3-19}$$

Misal : $A = h_1^3$

$B = -3\,h_1^2\,q$

$C = 3\,h_1\,q^2 + 3\,p\,h_1^2$

$D = -(q^3 + 6\,p\,h_1\,q)$

$$E = 3pq^2 + 3p^2 h_1$$

$$F = -3p^2 q$$

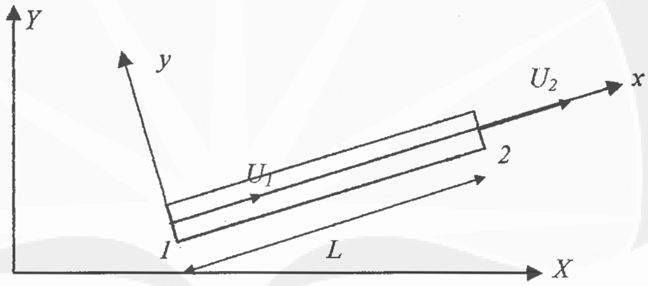
$$G = p^3 \tag{3-20}$$

Maka persamaan umumnya menjadi :

$$h^3 = A + B\frac{x}{L} + C\frac{x^2}{L^2} + D\frac{x^3}{L^3} + E\frac{x^4}{L^4} + F\frac{x^5}{L^5} + G\frac{x^6}{L^6} \tag{3-21}$$

3.4. Matriks Kekakuan Batang Aksial

Model elemen aksial bisa dilihat pada gambar 3.3 di bawah ini :



Gambar 3.3 Elemen Aksial

Matriks kekakuan elemen adalah :

$$[k]_1 = \iiint_{vol} [B]^T \, [E][B] dvol \tag{3-22}$$

Pilih asumsi perpindahan :

$$U = a_1 + a_2 x \tag{3-23}$$

Bila dinyatakan dalam notasi matriks, persamaan (3-22) menjadi :

$$\{U\} = [1 \quad x]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{3-24}$$

Konstanta a_1 dan a_2 dicari menggunakan syarat batas di titik 1 dan 2 sebagai berikut :

titik 1 : $x = 0,\ U = U_1$

$$U_1 = a_1 \rightarrow a_1 = U_1 \tag{3-25}$$

titik 2 : $x = L,\ U = U_2$

$$U_2 = U_1 + a_2 L \rightarrow a_2 = (U_2 - U_1)/L \tag{3-26}$$

Dalam notasi matriks :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \tag{3-27}$$

Substitusi persamaan (3-26) ke persamaan (3-23) diperoleh

$$\{U\} = [1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{U\} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \tag{3-28}$$

Untuk elemen aksial :

$$\varepsilon_x = \frac{dU}{dx} \tag{3-29}$$

$$\{\varepsilon\} = \left[\frac{d}{dx}\right] \{U\}$$

$$= \left[\frac{d}{dx}\right] \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \tag{3-30}$$

di mana : $[B] = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}$ (3-31)

$$dvol = A \,.\, dx = b \,.\, h \,.\, dx \tag{3-32}$$

$$[k]_1 = \int_x [B]^T E\,[B]\,A\,dx$$

$$= E\int_x \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} bh\,dx$$

$$= \frac{E}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left[b_1 - v\frac{x}{L} + u\frac{x^2}{L^2} \right] \left[h_1 - q\frac{x}{L} + p\frac{x^2}{L^2} \right] dx \tag{3-33}$$

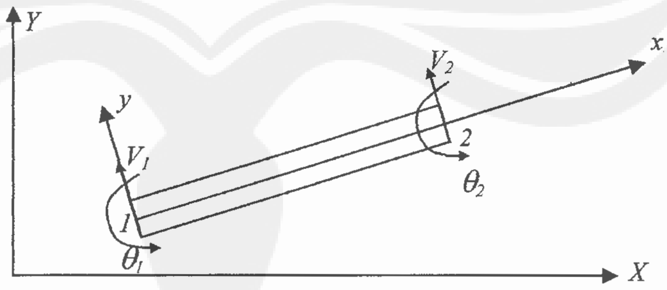
$$[k_{11}]_1 = \frac{E}{L^2}\int_0^L \left[b_1 - v\frac{x}{L} + u\frac{x^2}{L^2} \right] \left[h_1 - q\frac{x}{L} + p\frac{x^2}{L^2} \right] dx$$

$$= \frac{E}{L}\left[b_1\left(h_1 - \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{3}p\right) - v\left(\tfrac{1}{2}h_1 - \tfrac{1}{3}q + \tfrac{1}{4}p\right) + u\left(\tfrac{1}{3}h_1 - \tfrac{1}{4}q + \tfrac{1}{5}p\right) \right]$$

$$= [k_{22}]_1 = -[k_{12}]_1 = -[k_{21}]_1$$

3.5. Matriks Kekakuan Elemen Lentur

Model batang lentur dapat dilihat pada gambar 3.4 di bawah ini :



Gambar 3.4 Batang Lentur

Persamaan umum matriks kekakuan adalah

$$[k]_2 = \iiint_{vol} [B]^T\,[E]\,[B]\,dvol \tag{3-34}$$

Pada masalah elemen lentur dipilih asumsi perpindahan :

$$v = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$\theta = dV / dx = a_2 + 2\, a_3 x + 3\, a_4 x^2 \qquad (3\text{-}34)$$

Dalam notasi matriks :

$$\begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}35)$$

Konstanta a_1 sampai a_4 dicari menggunakan syarat batas di titik 1 dan 2 sebagai berikut :

di $x = 0 \rightarrow v_1 = a_1$

$\theta_1 = a_2$

di $x = L \rightarrow v_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 = v_1 + \theta_1 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$

$\theta_2 = a_2 + 2\, a_3 L + 3a_4 L^2 = \theta_1 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$

$$\begin{array}{ll} 3v_2 - 3v_1 - 3\theta_1 L & = 3a_3 L^2 + 3a_4 L^3 \\ \theta_2 L - \theta_1 L & = 2a_3 L^2 + 3a_4 L^3 \quad - \\ \hline \end{array}$$

$a_3 = (-3v_1 - 2\theta_1 L + 3v_2 - \theta_2 L) / L^2$

$a_4 = (2v_1 + \theta_1 L - 2v_2 + \theta_2 L) / L^3$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}36)$$

Regangan pada elemen lentur adalah

$$\varepsilon = \frac{d^2V}{dx^2} = (2a_3 + 6a_4\, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Sehingga

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

Pada elemen lentur

$$dvol = I\,.\,dx \tag{3-37}$$

sehingga persamaan kekakuan menjadi

$$[k] = E\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \frac{1}{12} bh^3 dx$$

Nilai dari masing-masing komponen persamaan kekakuan adalah

$$[k_{11}]_2 = E\int_0^L \left(\frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} \right) \frac{1}{12} \left(b_1 - v\frac{x}{L} + u\frac{x^2}{L^2} \right) \left(A + B\frac{x}{L} + C\frac{x^2}{L^2} + D\frac{x^3}{L^3} + E\frac{x^4}{L^4} + F\frac{x^5}{L^5} + G\frac{x^6}{L^6} \right) dx$$

$$= \frac{E}{12L^3} \left[A.b1(36 - 72 + 48) + B.b1(18 - 48 + 36) + C.b1(12 - 36 + 28{,}8) + \right.$$

$$D.b1(9-28{,}8+24)+E.b1\left(7{,}2C-24+\frac{144}{7}\right)+F.b1\left(6-\frac{144}{7}+18\right)+$$

$$G.b1\left(\frac{36}{7}-18+16\right)-A.v(18-48+36)-B.v\,(12-36+28{,}8)-$$

$$\mathrm{C}.v(9-28{,}8+24)-D.v\left(7{,}2-24+\frac{144}{7}\right)-E.v\left(6-\frac{144}{7}+18\right)-$$

$$\mathrm{F.v}\left(\frac{36}{7}-18+16\right)-G.v(4{,}5-16+14{,}4)+A.u(12-36+28{,}8)+$$

$$B.u(9-28{,}8+24)+C.u\left(7{,}2-24-\frac{144}{7}\right)+D.u\left(6-\frac{144}{7}+18\right)$$

$$\left.E.u\left(\frac{36}{7}-18+16\right)+F.u(4{,}5-16+14{,}4)+G.u\left(4-14{,}4+\frac{144}{11}\right)\right]$$

$$[k_{11}]_2=\frac{E}{12L^3}\left[b_1\left(12A+6B+4{,}8C+4{,}2D+\frac{26{,}4}{7}E+\frac{24}{7}F+\frac{22}{7}G\right)-\right.$$

$$v\left(6A+4{,}8B+4{,}2C+\frac{26{,}4}{7}D+\frac{24}{7}E+\frac{22}{7}F+2{,}9G\right)+$$

$$\left.u\left(4{,}8A+4{,}2B+\frac{26{,}4}{7}C+\frac{24}{7}D+\frac{22}{7}E+2{,}9F+\frac{29{,}6}{11}G\right)\right]$$

$$=[k_{33}]_2=-[k_{13}]_2=-[k_{31}]_2 \qquad \text{(3-38)}$$

$$[k_{12}]_2=E\int_0^L\left(\frac{24}{L^3}-\frac{84x}{L^4}+\frac{72x^2}{L^5}\right)\frac{1}{12}\left(b_1-v\frac{x}{L}+u\frac{x^2}{L^2}\right)\left(A+B\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}+C\frac{x^2}{L^2}+D\frac{\mathrm{x}^3}{L^3}+E\frac{x^4}{L^4}+\mathrm{F}\frac{\mathbf{x}^5}{L^5}+G\frac{x^6}{L^6}\right)d.$$

$$=\frac{E}{12L^2}[A.b1(24-42+24)+B.b1(12-28+18)+C.b1(8-21+14{,}4)+$$

$$D.b1(6-16{,}8+12)+E.b1\left(4{,}8-14+\frac{72}{7}\right)+F.b1\left(4-\frac{84}{7}+9\right)+$$

$$G.b1\left(\frac{24}{7}-10{,}5+8\right)-A.v(12-28+18)-B.v(8-21+14{,}4)-$$

$$C.v(6-16{,}8+12)-D.v\left(4{,}8-14+\frac{72}{7}\right)-E.v\left(4-\frac{84}{7}+9\right)-$$

$$F.v\left(\frac{24}{7}-10{,}5+8\right)-G.v\left(3-\frac{84}{9}+7{,}2\right)+A.u(8-21+14{,}4)+$$

$$B.u(6-16{,}8+12)+C.u\left(4{,}8-14+\frac{72}{7}\right)+D.u\left(4-\frac{84}{7}+9\right)+$$

$$E.u\left(\frac{24}{7}-10{,}5+8\right)+F.u\left(3-\frac{84}{9}+7{,}2\right)+G.u\left(\frac{24}{9}-8{,}4+\frac{72}{11}\right)\Bigg]$$

$$[k_{12}]_2=\frac{E}{12L^2}\left[b1\left(6A+2B+1{,}4C+1{,}2D+\frac{7{,}6}{7}E+F+\frac{6{,}5}{7}G\right)-\right.$$

$$v\left(2A+1{,}4B+1{,}2C+\frac{7{,}6}{7}D+E+\frac{6{,}5}{7}F+\frac{7{,}8}{9}G\right)+$$

$$\left.u\left(1{,}4A+1{,}2B+\frac{7{,}6}{7}C+D+\frac{6{,}5}{7}E+\frac{7{,}8}{9}F+\frac{80{,}4}{99}G\right)\right]$$

$$=[k_{21}]_2=-[k_{23}]_2=-[k_{32}]_2 \qquad (3\text{-}39)$$

$$[k_{14}]_2=E\int_0^L\left(\frac{12}{L^3}-\frac{60x}{L^4}+\frac{72x^2}{L^5}\right)\frac{1}{12}\left(b_1-v\frac{x}{L}+u\frac{x^2}{L^2}\right)\left(A+B\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}+C\frac{x^2}{L^2}+D\frac{\mathrm{x}^3}{L^3}+E\frac{x^4}{L^4}+\mathrm{F}\frac{\mathrm{x}^5}{L^5}+G\frac{x^6}{L^6}\right)dx$$

$$=\frac{E}{12L^2}\big[A.b1(12-30+24)+B.b1(6-20+18)+C.b1(4-15+14{,}4)+$$

$$D.b1(3-12+12)+E.b1\left(2{,}4-10+\frac{72}{7}\right)+F.b1\left(2-\frac{60}{7}+9\right)+$$

$$G.b1\left(\frac{12}{7}-7{,}5+8\right)-A.v(6-20+18)-B.v(4-15+14{,}4)-C.v(3-12+12)-$$

$$D.v\left(2{,}4-10+\frac{72}{7}\right)-E.v\left(2-\frac{60}{7}+9\right)-F.v\left(\frac{12}{7}-7{,}5+8\right)-G.v\left(1{,}5-\frac{60}{9}+7{,}2\right)+$$

$$A.u(4-15+14{,}4)+B.u(3-12+12)+C.u\left(2{,}4-10+\frac{72}{7}\right)+D.u\left(2-\frac{60}{7}+9\right)+$$

$$E.u\left(\frac{12}{7}-7{,}5+8\right)+F.u\left(1{,}5-\frac{60}{9}+7{,}2\right)+G.u\left(\frac{12}{9}-6+\frac{72}{11}\right)\Bigg]$$

$$[k_{14}]_2=\frac{E}{12L^2}\Bigg[b1\left(6A+4B+3{,}4C+3D+\frac{18{,}8}{7}E+\frac{17}{7}F+\frac{15{,}5}{7}G\right)-$$

$$v\left(4A+3{,}4B+3C+\frac{18{,}8}{7}D+\frac{17}{7}E+\frac{15{,}5}{7}F+\frac{18{,}3}{9}G\right)+$$

$$u\left(3{,}4A+3B+\frac{18{,}8}{7}C+\frac{17}{7}D+\frac{15{,}5}{7}E+\frac{18{,}3}{9}F+\frac{186}{99}G\right)\Bigg]$$

$$=[k_{41}]_2=-[k_{34}]_2=-[k_{43}]_2 \tag{3-40}$$

$$[k_{22}]_2=E\int_0^L\left(\frac{16}{L^2}-\frac{48x}{L^3}+\frac{36x^2}{L^4}\right)\frac{1}{12}\left(b_1-v\frac{x}{L}+u\frac{x^2}{L^2}\right)\left(A+B\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}+C\frac{x^2}{L^2}+D\frac{\mathrm{x}^3}{L^3}+E\frac{x^4}{L^4}+\mathrm{F}\frac{\mathbf{x}^5}{L^5}+G\frac{x^6}{L^6}\right)dx$$

$$=\frac{E}{12L}\Bigg[A.b1(16-24+12)+B.b1(8-16+9)+C.b1\left(\frac{16}{3}-12+7{,}2\right)+D.b1(4-9{,}6+6)+$$

$$E.b1\left(3{,}2-8+\frac{36}{7}\right)+F.b1\left(\frac{8}{3}-\frac{48}{7}+4{,}5\right)+G.b1\left(\frac{16}{7}-6+4\right)-A.v(8-16+9)-$$

$$B.v\left(\frac{16}{3}-12+7{,}2\right)-C.v(4-9{,}6+6)-D.v\left(3{,}2-8+\frac{36}{7}\right)-E.v\left(\frac{8}{3}-\frac{48}{7}+4{,}5\right)-$$

$$F.v\left(\frac{16}{7}-6+4\right)-G.v\left(2-\frac{48}{9}+3{,}6\right)+A.u\left(\frac{16}{3}-12+7{,}2\right)+B.u(4-9{,}6+6)+$$

$$C.u\left(3{,}2-8+\frac{36}{7}\right)+D.u\left(\frac{8}{3}-\frac{48}{7}+4{,}5\right)+E.u\left(\frac{16}{7}-6+4\right)+F.u\left(2-\frac{48}{9}+3{,}6\right)+$$

$$\left.G.u\left(\frac{16}{9}-4{,}8+\frac{36}{11}\right)\right]$$

$$[k_{22}]_2=\frac{E}{12L}\left[b1\left(4A+B+\frac{1{,}6}{3}C+0{,}4D+\frac{2{,}4}{7}E+\frac{13}{42}F+\frac{2}{7}G\right)-\right.$$

$$v\left(A+\frac{1{,}6}{3}B+0{,}4C+\frac{2{,}4}{7}D+\frac{13}{42}E+\frac{2}{7}F+\frac{2{,}4}{9}G\right)+$$

$$\left.u\left(\frac{1{,}6}{3}A+0{,}4B+\frac{2{,}4}{7}C+\frac{13}{42}D+\frac{2}{7}E+\frac{2{,}4}{9}F+\frac{24{,}8}{99}G\right)\right] \qquad (3\text{-}41)$$

$$[k_{24}]_2=E\int_0^L\left(\frac{8}{L^2}-\frac{36x}{L^3}+\frac{36x^2}{L^4}\right)\frac{1}{12}\left(b_1-v\frac{x}{L}+u\frac{x^2}{L^2}\right)\left(A+B\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}+C\frac{x^2}{L^2}+D\frac{\mathrm{x}^3}{L^3}+E\frac{x^4}{L^4}+\mathrm{F}\frac{\mathbf{x}^5}{L^5}+G\frac{x^6}{L^6}\right)dx$$

$$=\frac{E}{12L}\left[A.b1(8-12+12)+B.b1(4-12+9)+C.b1\left(\frac{8}{3}-9+7{,}2\right)+\right.$$

$$D.b1(2-7{,}2+6)+E.b1\left(1{,}6-6+\frac{36}{7}\right)+F.b1\left(\frac{4}{3}-\frac{36}{7}+4{,}5\right)+G.b1\left(\frac{8}{7}-4{,}5+4\right)-$$

$$A.v(4-12+9)-B.v\left(\frac{8}{3}-9+7{,}2\right)-Cv(2-7{,}2+6)-D.v\left(1{,}6-6+\frac{36}{7}\right)-$$

$$E.v\left(\frac{4}{3}-\frac{36}{7}+4{,}5\right)-F.v\left(\frac{8}{7}-4{,}5+4\right)-G.v(1-4+3{,}6)]+A.u\left(\frac{8}{3}-9+7{,}2\right)+$$

$$B.u(2-7{,}2+6)+C.u\left(1{,}6-6+\frac{36}{7}\right)+D.u\left(\frac{4}{3}-\frac{36}{7}+4{,}5\right)+E.u\left(\frac{8}{7}-4{,}5+4\right)+$$

$$F.u(1-4+3{,}6)+G.u\left(\frac{8}{9}-3{,}6+\frac{36}{11}\right)\Bigg]$$

$$=\frac{E}{12L}\left[b1\left(2A+B+\frac{2{,}6}{3}C+0{,}8D+\frac{26}{35}E+\frac{29}{42}F+\frac{9}{14}G\right)-\right.$$

$$v\left(A+\frac{2{,}6}{3}B+0{,}8C+\frac{26}{35}D+\frac{29}{42}E+\frac{9}{14}F+0{,}6G\right)+$$

$$\left.u\left(\frac{2{,}6}{3}A+0{,}8B+\frac{26}{35}C+\frac{29}{42}D+\frac{9}{14}E+0{,}6F+\frac{55{,}6}{99}G\right)\right]$$

$$=[k_{42}]_2 \qquad (3\text{-}42)$$

$$[k_{44}]_2=E\int_0^L\left(\frac{4}{L^2}-\frac{24x}{L^3}+\frac{36x^2}{L^4}\right)\frac{1}{12}\left(b_1-v\frac{x}{L}+u\frac{x^2}{L^2}\right)\left(A+B\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}+C\frac{x^2}{L^2}+D\frac{\mathrm{x}^3}{L^3}+E\frac{x^4}{L^4}+\mathrm{F}\frac{\mathrm{x}^5}{L^5}+G\frac{x^6}{L^6}\right)dx$$

$$=\frac{E}{12L^2}\left[A.b1(4-12+12)+B.b1(2-8+9)+C.b1\left(\frac{4}{3}-6+7{,}2\right)+\right.$$

$$D.b1(1-4{,}8+6)+E.b1\left(0{,}8-4+\frac{36}{7}\right)+F.b1\left(\frac{2}{3}-\frac{24}{7}+4{,}5\right)+G.b1\left(\frac{4}{7}-3+4\right)-$$

$$A.v(2-8+9)-B.v\left(\frac{4}{3}-6+7{,}2\right)-C.v(1-4{,}8+6)-D.v\left(0{,}8-4+\frac{36}{7}\right)-$$

$$E.v\left(\frac{2}{3}-\frac{24}{7}+4{,}5\right)-Fv\left(\frac{4}{7}-3+4\right)-G.v\left(0{,}5-\frac{24}{9}+3{,}6\right)+A.u\left(\frac{4}{3}-6+7{,}2\right)+$$

$$B.u(1-4{,}8+6)+C.u\left(0{,}8-4+\frac{36}{7}\right)+D.u\left(\frac{2}{3}-\frac{24}{7}+4{,}5\right)+E.u\left(\frac{4}{7}-3+4\right)+$$

$$\left.F.u\left(0{,}5-\frac{24}{9}+3{,}6\right)+G.u\left(\frac{4}{9}-2{,}4+\frac{36}{11}\right)\right]$$

$$=\frac{E}{12L}\left[b1\left(4A+3B+\frac{7{,}6}{3}C+2{,}2D+\frac{13{,}6}{7}E+\frac{73}{42}F+\frac{11}{7}G\right)-\right.$$

$$v\left(3A+\frac{7,6}{3}B+2,2C+\frac{13,6}{7}D+\frac{73}{42}E+\frac{11}{7}F+\frac{12,9}{9}G\right)+$$

$$u\left(\frac{7,6}{3}A+2,2B+\frac{13,6}{7}C+\frac{73}{42}D+\frac{11}{7}E+\frac{12,9}{9}F+\frac{130,4}{99}G\right)\Bigg] \qquad (3\text{-}43)$$

3.6. Matriks Kekakuan Aksial dan Lentur

Matriks kekakuan elemen aksial dan lentur merupakan gabungan dari matriks kekakuan yang diturunkan pada sub bab 3.4. dan 3.5., yang dapat dinyatakan sebagai

$[S_M] = [k]_1 + [k]_2$

atau

$$[S_M]=\begin{bmatrix} [k_{11}]_1 & 0 & 0 & [k_{12}]_1 & 0 & 0 \\ 0 & [k_{11}]_2 & [k_{12}]_2 & 0 & [k_{13}]_2 & [k_{14}]_2 \\ 0 & [k_{21}]_2 & [k_{22}]_2 & 0 & [k_{23}]_2 & [k_{24}]_2 \\ [k_{21}]_1 & 0 & 0 & [k_{22}]_1 & 0 & 0 \\ 0 & [k_{31}]_2 & [k_{32}]_2 & 0 & [k_{33}]_2 & [k_{34}]_2 \\ 0 & [k_{41}]_2 & [k_{42}]_2 & 0 & [k_{43}]_2 & [k_{44}]_2 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}44)$$

dengan nilai masing-masing komponen sesuai dengan persamaan (3-32) dan (3-38) sampai (3-43).

3.7. Penerapan Metode Kolom Analogi untuk Gaya Jepit Ujung Batang

Metode kolom analogi ini sangat berguna dalam analisis *fixed beams* dan *curved members (arches)*. Analisis ini menggunakan perhitungan yang serupa dengan perhitungan tegangan pada kolom yang memikul kombinasi lenturan dan tegangan langsung.

3.7.1. Sifat kolom analogi

Yang termasuk sifat-sifat kolom analogi adalah luas elemen, momen terhadap salah satu titik ujung dan momen inertia terhadap sumbu y. Semua sifat kolom analogi itu harus dihitung untuk mencari momen primer.

Batang tak prismatis yang akan dihitung sifat-sifatnya diselesaikan dengan membagi batang atau kolom analogi menjadi beberapa segmen yang sama panjangnya, kemudian dihitung masing-masing luasannya. Dari masing-masing luasan itu dicari momen terhadap salah satu ujung batang, kemudian momen inertia pada bagian titik berat segmen diambil sebagai momen inertia yang mewakili segmen tersebut.

3.7.2. Beban pada kolom analogi

Yang dimaksud beban pada kolom analogi adalah beban total yang bekerja pada pusat berat segmen. Setelah diketahui beban pada masing-masing bagian pusat berat segmen, kemudian dihitung momen terhadap sumbu y.

3.8. Momen Primer Kolom Analogi

Setelah didapat sifat-sifat dan beban dari kolom analogi, maka untuk momen primer dapat dicari dengan rumus (Ghali, A. dan Neville, A.M., 1986, hal 207) :

$$M = \frac{N}{A} + \frac{My}{Iy}.x \qquad (3\text{-}45)$$

dengan M adalah momen primer, N adalah beban total yang bekerja pada pusat berat segmen, A adalah luas kolom analogi, My adalah momen terhadap sumbu y, Iy adalah momen inertia terhadap sumbu y, dan x adalah panjang batang.