BAB III

LANDASAN TEORI

III.1 Konsep Dasar Metode Kekakuan

Pada sebuah struktur rangka, deformasi yang terjadi akibat beban yang bekerja dapat diwakili oleh perpindahan-perpindahan pada *joints*. Deformasi pada *joint* yang lain dapat dihitung melalui perpindahan tersebut, yang vektor perpindahannya disebut dengan derajat kebebasan global. Sedangkan untuk suatu bagian dari struktur, deformasi yang terjadi akibat beban yang bekerja dapat diwakili oleh perpindahan-perpindahan pada sejumlah arah pada ujung dari bagian struktur tersebut. Vektor perpindahan tersebut dinamakan derajat kebebasan lokal.

III.2 Analisis Portal Bidang Menggunakan Metode Kekakuan

III.2.1 Derajat Kebebasan Lokal

Setiap batang pada portal bidang memiliki sistem koordinatnya masing-masing yang disebut dengan sistem koordinat lokal. Setiap batang diapit oleh *joint* i dan *joint* j, dan setiap *joint* memiliki tiga derajat kebebasan lokal seperti gambar 3.1 di bawah ini.

Gambar 3.1 Derajat Kebebasan Lokal Batang

Vektor Ux-i dan Uy-i adalah translasi pada *joint* i, Rz-i melambangkan rotasi *joint* i. Vektor Ux-j dan Uy-j adalah translasi pada *joint* j, Rz-j melambangkan rotasi *joint* j.

III.2.2 Matriks Kekakuan Batang Prismatis dalam Koordinat Lokal

Matriks kekakuan batang prismatis dalam koordinat lokal batang [K_L] ditentukan berdasarkan karakteristik material bahan, antara lain: panjang batang (L), luas penampang batang (A), modulus elastisitas bahan (E), dan momen inersia penampang batang (I). [K_L] dirumuskan sebagai berikut (Weaver, *et al.*, 1980, hal. 174):

$$[K_L]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad \text{.................................. (3-1)}$$

III.2.3 Matriks Kekakuan Batang Non-Prismatis dalam Koordinat Lokal

Kekakuan suatu batang tergantung pada luas penampang batang (A) dan momen inersia batang (I). Pada batang non-prismatis yang berubah secara *linear* maupun parabolis pada lebar (b) dan tinggi (h) penampang batangnya, luas penampang (A) dan momen inersia (I) pada setiap potongan melintangnya selalu berubah/tidak konstan.

Lebar penampang pada batang (b) yang non-prismatis secara *linear* dan parabolis berubah menurut persamaan berikut:

$$b=b_1+\frac{-3b_1-b_2+4b_3}{L}x+\frac{2(b_1+b_2-2b_3)}{L^2}x^2 \quad \text{.. (3-2)}$$

sedangkan tinggi penampang batangnya (h) berubah menurut persamaan berikut:

$$h=h_1+\frac{-3h_1-h_2+4h_3}{L}x+\frac{2(h_1+h_2-2h_3)}{L^2}x^2 \quad \text{.. (3-3)}$$

dengan b_1 adalah lebar penampang batang pada *joint* i, b_2 adalah lebar penampang batang pada *joint* j, b_3 adalah lebar penampang batang di tengah bentang, h_1 adalah tinggi penampang batang pada *joint* i, h_2 adalah tinggi penampang batang pada *joint* j, dan h_3 adalah tinggi penampang batang di tengah bentang.

Dengan memperhitungkan perubahan besaran A dan I pada matriks kekakuan batang prismatis pada persamaan (3-1), akan diperoleh matriks kekakuan untuk batang non-prismatis dalam tata koordinat lokal sebagai berikut (Pribadi, 2003, hal. 35):

$$[K_L]=\begin{bmatrix} [k_{11}]_1 & 0 & 0 & [k_{12}]_1 & 0 & 0 \\ 0 & [k_{11}]_2 & [k_{12}]_2 & 0 & [k_{13}]_2 & [k_{14}]_2 \\ 0 & [k_{21}]_2 & [k_{22}]_2 & 0 & [k_{23}]_2 & [k_{24}]_2 \\ [k_{21}]_1 & 0 & 0 & [k_{22}]_1 & 0 & 0 \\ 0 & [k_{31}]_2 & [k_{32}]_2 & 0 & [k_{33}]_2 & [k_{43}]_2 \\ 0 & [k_{41}]_2 & [k_{42}]_2 & 0 & [k_{43}]_2 & [k_{44}]_2 \end{bmatrix} \quad \text{.. (3-4)}$$

Komponen matriks kekakuan batang $[k_{11}]_1$, $[k_{12}]_1$, $[k_{21}]_1$, $[k_{22}]_1$ pada persamaan (3-4) adalah komponen aksial batang, yang besarnya sebagai berikut:

$[k_{11}]_1 = [k_{12}]_1 = [k_{21}]_1 = [k_{22}]_1$

$$[k_{11}]_1 = \frac{E}{L}\left(b_1(h_1 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{3}p) - v(\frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{3}q + \frac{1}{4}p) + u(\frac{1}{3}h_1 - \frac{1}{4}q + \frac{1}{5}p) \right) \quad \text{.................. (3-5)}$$

sedangkan komponen matriks kekakuan batang $[k_{11}]_2$ hingga $[k_{44}]_2$ adalah komponen lentur batang, yang besarnya sebagai berikut:

$[k_{11}]_2 = - [k_{13}]_2 = - [k_{31}]_2 = [k_{33}]_2$

$$\begin{aligned}[k_{11}]_2 = \frac{E}{12L^3}\Bigg(& b_1(12A + 6B + 4{,}8C + 4{,}2D + \frac{26{,}4}{7}E + \frac{24}{7}F + \frac{22}{7}G) - \\ & v(6A + 4{,}8B + 4{,}2C + \frac{26{,}4}{7}D + \frac{24}{7}E + \frac{22}{7}F + 2{,}9G) + \\ & u(4{,}8A + 4{,}2B + \frac{26{,}4}{7}C + \frac{24}{7}D + \frac{22}{7}E + 2{,}9F + \frac{29{,}6}{11}G)\Bigg) \end{aligned} \quad \text{............................ (3-6)}$$

$[k_{12}]_2 = [k_{21}]_2 = - [k_{23}]_2 = - [k_{32}]_2$

$$[k_{12}]_2 = \frac{E}{12L^2}\Bigg(b_1(6A+2B+1{,}4C+1{,}2D+\frac{7{,}6}{7}E+F+\frac{6{,}5}{7}G)-$$

$$v(2A+1{,}4B+1{,}2C+\frac{7{,}6}{7}D+E+\frac{6{,}5}{7}F+\frac{7{,}8}{9}G)+$$

$$u(1{,}4A+1{,}2B+\frac{7{,}6}{7}C+D+\frac{6{,}5}{7}E+\frac{7{,}8}{9}F+\frac{80{,}4}{99}G)\Bigg) \quad \text{(3-7)}$$

$[k_{14}]_2 = [k_{41}]_2 = - [k_{34}]_2 = - [k_{43}]_2$

$$[k_{14}]_2 = \frac{E}{12L^2}\Bigg(b_1(6A+4B+3{,}4C+3D+\frac{18{,}8}{7}E+\frac{17}{7}F+\frac{15{,}5}{7}G)-$$

$$v(4A+3{,}4B+3C+\frac{18{,}8}{7}D+\frac{17}{7}E+\frac{15{,}5}{7}F+\frac{18{,}3}{9}G)+$$

$$u(3{,}4A+3B+\frac{18{,}8}{7}C+\frac{17}{7}D+\frac{15{,}5}{7}E+\frac{18{,}3}{9}F+\frac{186}{99}G)\Bigg) \quad \text{(3-8)}$$

$$[k_{22}]_2 = \frac{E}{12L}\Bigg(b_1(4A+B+\frac{1{,}6}{3}C+0{,}4D+\frac{2{,}4}{7}E+\frac{13}{42}F+\frac{2}{7}G)-$$

$$v(A+\frac{1{,}6}{3}B+0{,}4C+\frac{2{,}4}{7}D+\frac{13}{42}E+\frac{2}{7}F+\frac{2{,}4}{9}G)+$$

$$u(\frac{1{,}6}{3}A+0{,}4B+\frac{2{,}4}{7}C+\frac{13}{42}D+\frac{2}{7}E+\frac{2{,}4}{9}F+\frac{24{,}8}{99}G)\Bigg) \quad \text{(3-9)}$$

$[k_{24}]_2 = [k_{42}]_2$

$$[k_{24}]_2 = \frac{E}{12L}\Bigg(b_1(2A+B+\frac{2{,}6}{3}C+0{,}8D+\frac{26}{35}E+\frac{29}{42}F+\frac{9}{14}G)-$$

$$v(A+\frac{2{,}6}{3}B+0{,}8C+\frac{26}{35}D+\frac{29}{42}E+\frac{9}{14}F+0{,}6G)+$$

$$u(\frac{2{,}6}{3}A+0{,}8B+\frac{26}{35}C+\frac{29}{42}D+\frac{9}{14}E+0{,}6F+\frac{55{,}6}{99}G)\Bigg) \quad \text{(3-10)}$$

$$[k_{44}]_2 = \frac{E}{12L}\left(b_1(4A + 3B + \frac{7,6}{3}C + 2,2D + \frac{13,6}{7}E + \frac{73}{42}F + \frac{11}{7}G) - \right.$$

$$v(3A + \frac{7,6}{3}B + 2,2C + \frac{13,6}{7}D + \frac{73}{42}E + \frac{11}{7}F + \frac{12,9}{9}G) +$$

$$\left. u(\frac{7,6}{3}A + 2,2B + \frac{13,6}{35}C + \frac{73}{42}D + \frac{11}{7}E + \frac{12,9}{9}F + \frac{130,4}{99}G) \right) \quad \text{(3-11)}$$

dengan:

$$A = h_1^{\,3} \quad \text{(3-12)}$$

$$B = -3\,h_1^{\,2}\,q \quad \text{(3-13)}$$

$$C = 3\,h_1\,q^2 + 3\,p\,h_1^{\,2} \quad \text{(3-14)}$$

$$D = -(q^3 + 6\,p\,h_1\,q) \quad \text{(3-15)}$$

$$E = 3\,p\,q^2 + 3\,p^2\,h_1 \quad \text{(3-16)}$$

$$F = -3\,p^2\,q \quad \text{(3-17)}$$

$$G = p^3 \quad \text{(3-18)}$$

$$u = 2(b_1 + b_2 - 2b_3) \quad \text{(3-19)}$$

$$v = b_1 - b_2 + u \quad \text{(3-20)}$$

$$p = 2(h_1 + h_2 - 2h_3) \quad \text{(3-21)}$$

$$q = h_1 - h_2 + p \quad \text{(3-22)}$$

III.2.4 Matriks Transformasi Rotasi

Matriks transformasi rotasi [T] adalah matriks yang berfungsi sebagai sebuah faktor yang bertugas menyesuaikan *property* batang yang sumbunya mengikuti tata sumbu lokal batang yang berrotasi sebesar α dari tata sumbu globalnya. Untuk dapat menghitung matriks kekakuan batang dalam koordinat global harus dibentuk matriks transformasi rotasi [T]-nya terlebih dahulu.

$$[T]=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{.......... (3-23)}$$

Nilai sin α dan cos α dapat dihitung menggunakan persamaan berikut:

$$\sin\alpha = \frac{y_j - y_i}{L} \quad \text{.......... (3-24)}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_j - x_i}{L} \quad \text{.......... (3-25)}$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad \text{.......... (3-26)}$$

dengan (x_i,y_i) adalah koordinat *joint* i dalam tata koordinat global, (x_j,y_j) adalah koordinat *joint* j dalam tata koordinat global, dan L adalah panjang batang.

III.2.5 Matriks Kekakuan Batang dalam Koordinat Global

Matriks kekakuan batang dalam koordinat global $[K_G]$ berdasarkan *Identification* (*ID*) perpindahannya dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut:

$$[K_G] = [T]^T \cdot [K_L] \cdot [T] \quad \text{.......... (3-27)}$$

III.2.6 Matriks Kekakuan Struktur

Matriks kekakuan struktur $[K_S]$ dapat diperoleh dengan menjumlahkan matriks-matriks kekakuan batang dalam koordinat global $[K_G]$ sesuai dengan *ID* perpindahannya:

$$[K_S] = \sum_N [K_G]_N \quad \text{......} \quad (3\text{-}28)$$

dengan N adalah jumlah batang pada portal bidang.

III.2.7 Vektor Beban Ekivalen dalam Koordinat Global

Untuk dapat menentukan vektor beban ekivalen dalam koordinat global $\{S_E\}$, kita harus menentukan vektor beban ekivalen dalam koordinat lokal $\{S\}$ terlebih dahulu. Vektor beban ekivalen dalam koordinat lokal $\{S\}$ dapat ditentukan dengan menghitung gaya-gaya jepit ujung akibat beban luar yang bekerja pada batang, yaitu momen jepit ujung (M_{FE}), gaya geser jepit ujung (V_{FE}), dan gaya aksial jepit ujung (N_{FE}).

$$\{S_E\} = [T]\cdot\{S\} = [T]\cdot\begin{Bmatrix} N_{FEi} \\ V_{FEi} \\ M_{FEi} \\ N_{FEj} \\ V_{FEj} \\ M_{FEj} \end{Bmatrix} \quad \text{......} \quad (3\text{-}29)$$

III.2.8 Vektor Beban

Vektor beban {R'} dapat diperoleh melalui persamaan berikut.

$$\{R'\} = \{R\} - \sum_N \{S_E\}_N \quad \text{......} \quad (3\text{-}30)$$

vektor {R} pada persamaan (3-30) adalah vektor beban yang bekerja pada *joint* yang disusun berdasarkan *ID* perpindahannya sebagai berikut:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} \quad \text{(3-31)}$$

dengan N adalah jumlah batang pada portal, F_{xi} adalah gaya pada *joint* i searah sumbu x dalam koordinat global, F_{yi} adalah gaya pada *joint* i searah sumbu y dalam koordinat global, M_{zi} adalah momen terhadap sumbu z pada *joint* i dalam koordinat global, F_{xj} adalah gaya pada *joint* j searah sumbu x dalam koordinat global, F_{yj} adalah gaya pada *joint* j searah sumbu y dalam koordinat global, dan M_{zj} adalah momen terhadap sumbu z pada *joint* j dalam koordinat global

III.2.9Perpindahan dan Gaya Batang

Vektor perpindahan *joint* {D} dan vektor gaya-dalam batang {F} dapat dihitung menggunakan persamaan-persamaan berikut ini.

$$\{D\} = [K_S]^{-1} \cdot \{R'\} \quad \text{(3-32)}$$

$$\{F\} = [K_L] \cdot [T] \cdot \{D\} + \{S\} \quad \text{(3-33)}$$