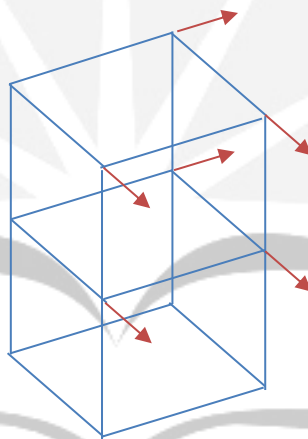


BAB II

TINJAUAN PUSTAKA DAN LANDASAN TEORI

2.1. Tinjauan Pustaka

Studi yang dilakukan oleh Brincker,dkk (2000) tentang “*modal identification of output – only system using frequency domain decomposition*” pada model bangunan dua lantai dapat dilihat pada Gambar 2.1. Dalam analisis, respons bangunan dua lantai disimulasikan menggunakan parameter *lumped* dengan enam derajat kebebasan,data percepatan sebanyak $(n) = 10000$ sample dengan tiga kondisi yaitu tanpa noise, noise 10% dan noise 20%.

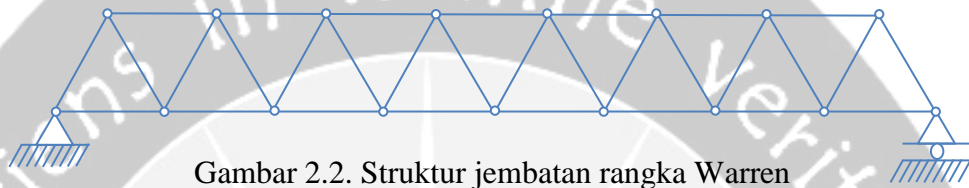


Gambar 2.1. Geometri model bangunan dua lantai

Dengan menggunakan prosedur FDD, Brincker,dkk (2000) menyimpulkan bahwa rasio parameter modal berhasil diidentifikasi dengan akurasi yang sangat baik.

Selanjutnya studi dilakukan oleh Widjajakusuma dan Limbunan (2013) memeriksa kerusakan jembatan dengan *non destructive testing* (NDT) berdasarkan uji vibrasi. Jembatan yang dimodelkan dalam penelitian ini adalah satu bentang dengan rangka warren dapat dilihat pada Gambar 2.2. dimana

memiliki panjang bentang 40 m, dengan elemen batang penyusunnya menggunakan profil WH-300 (300 x 300 x 10 x 15) baja BJ 37, densitas massa $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, modulus elastisitas (E) = $0.2 \times 10^6 \text{ Mpa}$ dengan tegangan leleh $f_y = 240 \text{ MPa}$. Kerusakan struktur diasumsikan mempengaruhi E menjadi $0.1 \times 10^6 \text{ MPa}$.

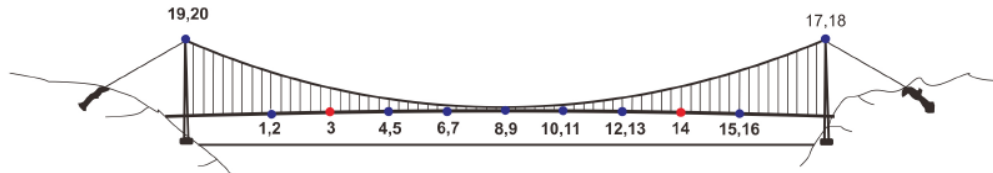


Gambar 2.2. Struktur jembatan rangka Warren

Berdasarkan hasil uji simulasi maka didapatkan bahwa jembatan akan mengalami kerusakan jika frekwensi alami dari struktur tersebut mengalami penurunan sekitar 3% dari frekwensi alami awal.

Selain peneliti - peneliti diatas, Schanke (2015) dalam penelitiannya tentang “*operational modal analysis of large bridges*” pada *hardanger bridge* melakukan penelitian untuk membandingkan beberapa metode OMA baik dalam domain waktu maupun dalam domain frekuensi untuk mengidentifikasi parameter modal dari model simulasi struktur jembatan Hardanger dapat dilihat pada Gambar 2.3. Metode OMA yang digunakan dalam penelitian tersebut antara lain yaitu *covariance-driven stochastic subspace identification*, *data-driven stochastic subspace identification*, *second order blind identification*, *peak picking*, *frequency domain decomposition*, *lest squares complex frequency method* dan *poly-reference lest squares complex frequency method*. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis parameter modal berupa ; frekuensi alami struktur (ω_n), periode getar (T) dan mode getar (ϕ) dari

beberapa metode diatas dan membandingkan hasil dari sifat - sifat parameter modal tersebut untuk mendapatkan metode mana yang paling akurat dan efisien.



Gambar 2.3. Struktur jembatan Hardanger

Hasil penelitian dengan menggunakan metode FDD menyimpulkan bahwa nilai frekuensi alami dapat diperoleh dengan akurat apabila nilai NFFT *Singular plot* untuk NFFTnya = 8192. Hal ini dilakukan mengingat NFFT rendah, beberapa puncak akan sulit dipilih secara akurat karena berada diantara dua titik dengan resolusi rendah dari vektor frekuensi. Sebaliknya NFFT terlalu tinggi, beberapa puncak menjadi lebih dominan, yang membuat lebih sulit untuk memilih puncak lainnya.

2.2. Landasan Teori

Pada bagian ini, akan diberikan penjelasan umum tentang teori yang mendasari dan mendukung penelitian ini yaitu :

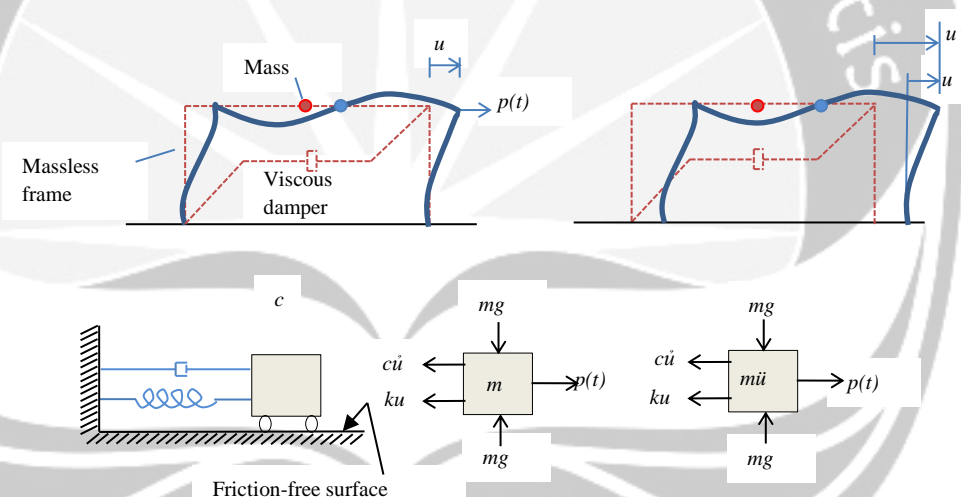
2.2.1. Derajat Kebebasan (*Degree of freedom*)

Derajat kebebasan (*degree of freedom*) adalah derajat impedensi yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu sistem pada setiap saat. Dalam model sistem derajat kebebasan tunggal, setiap massa M , redaman C , kekakuan K dan gaya luar dianggap bertumpu pada elemen fisis tunggal. Struktur yang mempunyai n -derajat kebebasan atau struktur dengan

derajat kebebasan banyak disebut *multi degree of freedom* (MDOF). Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa jumlah derajat kebebasan adalah jumlah koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu massa pada saat tertentu.

2.2.1.1. Sistem Derajat Kebebasan Tunggal

Sistem derajat kebebasan tunggal atau *single degree of freedom* (SDOF) hanya akan mempunyai satu koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi massa pada saat tertentu yang ditinjau. Bangunan satu tingkat adalah salah satu contoh bangunan derajat kebebasan tunggal.



Gambar 2.4. Modelisasi SDOF

Sistem SDOF terdiri dari massa (m) yang terkonsentrasi pada tingkat atap, dengan rangka massa kecil memiliki kekakuan pada sistem dan redaman pelekak yang dapat dilihat pada Gambar 2.4.

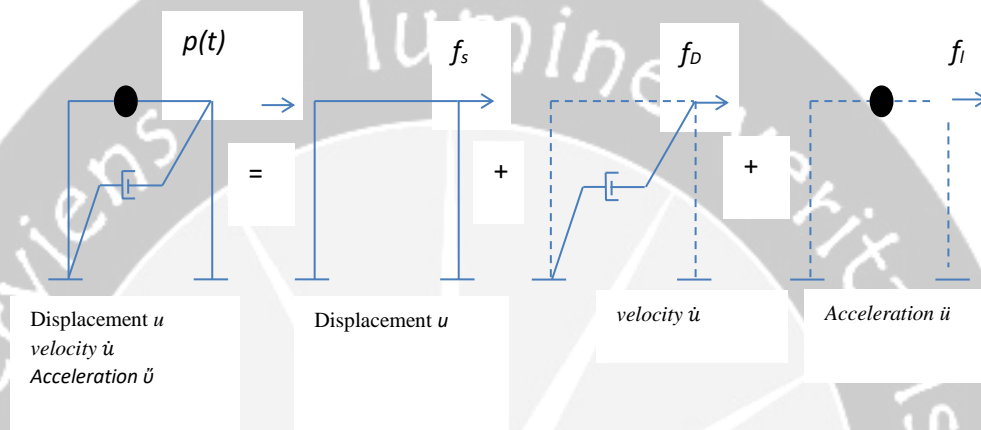
Dari pemodelan diatas dapat disuperposisikan dengan menggunakan hukum kesetimbangan Newton kedua, dimana gaya-gaya yang dialami struktur :

$p(t)$: gaya luar yang akan didistribusikan keseluruhan struktur

$f_I = m\ddot{u}$: gaya luar komponen massa terhadap percepatan gerakan tanah

$f_d = c\dot{u}$: gaya luar komponen redaman terhadap percepatan gerakan tanah

$f_s = ku$: gaya luar komponen kekakuan terhadap percepatan gerakan tanah



Gambar 2.5. Modelisasi Kestimbangan SDOF Dinamik (Chopra,1995)

Berdasarkan modelisasi pada Gambar 2.5 maka diperoleh rumus :

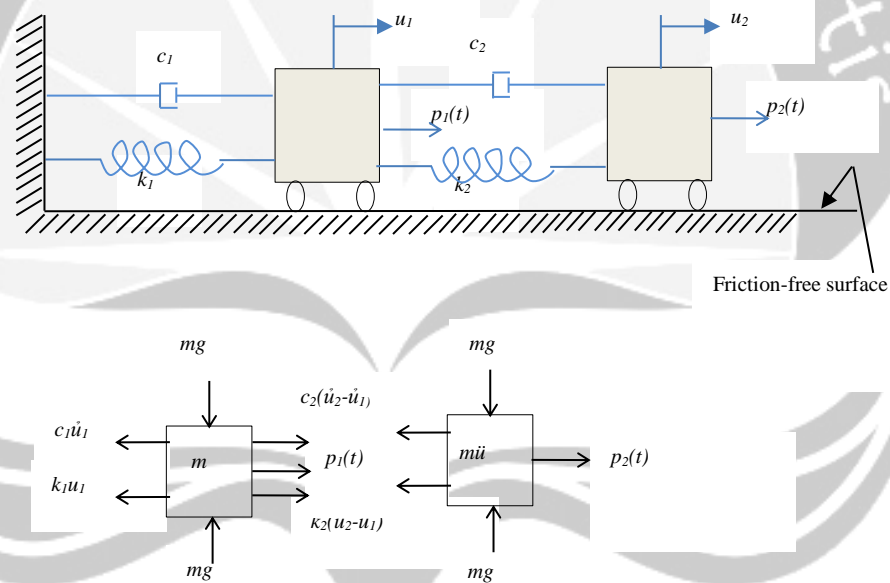
$p(t) = f_s + f_d + f_I$ atau dapat juga ditulis

$$p(t) = m\ddot{u} + c\dot{u} + ku \dots\dots\dots(2.1)$$

Massa keseluruhan (m) dari sistem ini dicakup dalam balok tegar terhadap percepatan pergerakan (\ddot{u}). Tahanan elastik terhadap perpindahan diberikan oleh pegas tanpa bobot dengan kekakuan (k) terhadap perpindahan pergerakan (u), sedang mekanisme kehilangan energi (*energy loss*) digambarkan oleh peredam (c) terhadap kecepatan pergerakan (\dot{u}). Mekanisme pembebanan luar yang menimbulkan respon dinamik pada sistem dengan berbentuk beban $p(t)$ yang berubah menurut waktu.

2.2.1.2. Sistem Derajat Kebebasan Banyak

Untuk menyatakan persamaan diferensial gerakan pada struktur dengan derajat kebebasan banyak / majemuk maka digunakan anggapan dan pendekatan seperti struktur dengan derajat kebebasan tunggal SDOF. Guna memperoleh persamaan diferensial tersebut, maka tetap dipakai prinsip keseimbangan dinamik (*dynamic equilibrium*) pada suatu massa yang ditinjau. Untuk memperoleh persamaan tersebut maka diambil model struktur MDOF (lihat Gambar 2.6).



Gambar 2.6. Modelisasi MDOF

Berdasarkan pada kesetimbangan dinamik pada *free body diagram* maka diperoleh :

$$m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_1u_1 - k_2(u_2 - u_1) = p_1(t) \dots\dots\dots(2.2)$$

$$m_2\ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) = p_2(t) \dots\dots\dots(2.3)$$

Pada persamaan -persamaan tersebut diatas tampak bahwa kesetimbangan dinamik suatu massa yang ditinjau ternyata dipengaruhi oleh kekakuan,redaman dan simpangan massa sebelum dan sesudahnya. Persamaan dengan sifat - sifat seperti ini umumnya disebut *coupled equation* karena persamaan - persamaan tersebut akan tergantung satu sama lain. Penyelesaian persamaan *coupled* harus dilakukan secara simultan artinya dengan melibatkan semua persamaan yang ada. Pada struktur dengan derajat kebebasan banyak, persamaan gerakannya merupakan persamaan yang dependen atau *coupled* antara satu dengan yang lain. Selanjutnya dengan menyusun persamaan - persamaan diatas menurut parameter yang sama (percepatan, kecepatan dan simpangan) selanjutnya akan diperoleh :

$$m_1\ddot{u}_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = p_1(t) \dots\dots\dots(2.4)$$

$$m_2\ddot{u}_2 - c_1\dot{u}_1 + c_2\dot{u}_2 - k_1u_1 + k_2u_2 = p_2(t) \dots\dots\dots(2.5)$$

Persamaan - persamaan diatas dapat ditulis kedalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.6)$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam matriks yang lebih kompleks :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{p(t)\} \dots\dots\dots(2.7)$$

dengan $[M]$, $[C]$, $[K]$ berturut - turut adalah matriks massa, matriks redaman dan matriks kekakuan struktur.

2.2.2. Parameter Modal

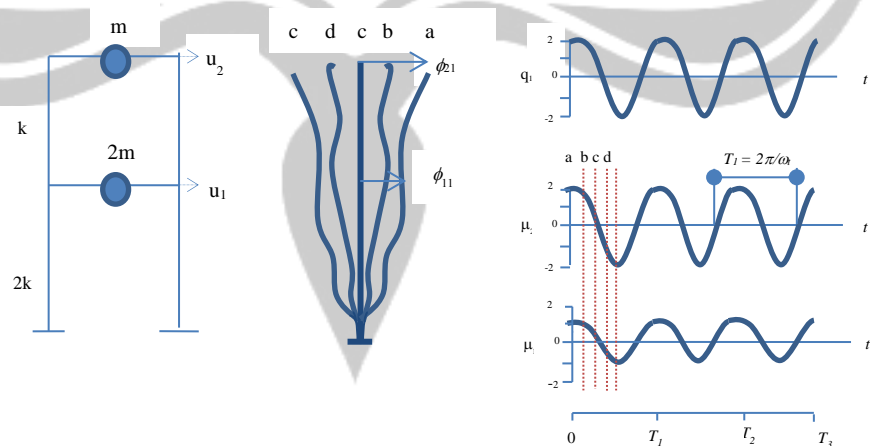
2.2.2.1. Periode Getar

Periode getar (T_n) dari suatu sistem MDOF waktu yang diperlukan struktur untuk melakukan satu siklus gerakan harmonik sederhana dalam satu mode getarnya. Hubungan antara periode getar dengan frekwensi alami (ω_n) dan frekwensi alami *cyclic* (f_n) adalah sebagai berikut :

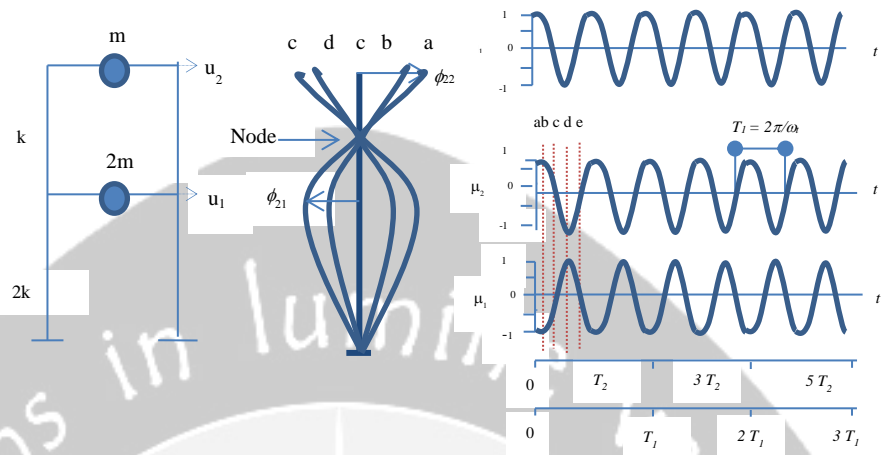
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \dots\dots\dots(2.8)$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} \dots\dots\dots(2.9)$$

Gambar 2.7 dan 2.8 menunjukkan dua periode getar dan frekwensi alami gedung 2 lantai yang digetarkan pada mode getarnya $\phi_n = \langle \phi_{1n} \ \phi_{2n} \rangle^T$ Nilai yang lebih kecil dari dua frekwensi alami ditunjukkan ω_1 dan yang lebih besar oleh ω_2 . Sebaliknya, periode getar yang lebih lama ditunjukkan oleh T_1 dan yang lebih pendek ditunjukkan oleh T_2 .



Gambar 2.7. Getaran bebas sistem tak teredam pada mode getar pertama



Gambar 2.8. Getaran bebas sistem tak teredam pada mode getar kedua

2.2.2.2. Mode Getar

Suatu struktur tak teredam akan mengalami gerakan harmonik sederhana tanpa perubahan bentuk defleksi, namun jika getaran bebas dimulai dengan distribusi *displacement* yang cocok pada tiap DOF seperti pada gambar 2.7 dan 2.8, dua karakteristik bentuk defleksi muncul jika sistem dua DOF ini diberikan *displacement* pada tiap bentuk defleksi dan dilepaskan, sistem ini akan bergetar dengan gerakan harmonik sederhana, sambil mempertahankan bentuk defleksinya. Kedua lintai mencapai *displacement* ekstrimnya masing – masing pada waktu yang bersamaan dan melewati posisi kesetimbangan pada waktu bersamaan pula. Dapat dilihat bahwa *displacement* pada setiap lintai berada pada arah yang sama pada karakteristik defleksi yang pertama dan berada pada arah yang berlawanan pada karakteristik defleksi yang kedua. Titik dimana *displacement* bernilai nol disebut nodal, seperti yang terlihat pada Gambar 2.8. Jika jumlah mode n semakin meningkat, jumlah nodal pun akan

semakin banyak. Setiap karakteristik bentuk defleksi ini disebut mode getar natural dari sistem MDOF. Setiap struktur hampir tidak mungkin hanya memiliki satu derajat kebebasan tetapi sistem memiliki banyak derajat kebebasan sehingga sistem akan banyak memiliki solusi yang mengindikasikan mode getar dari sistem. Getaran bebas akan muncul pada tiap mode dengan frekwensi tertentu pula. Setiap mode tidak bergantung dengan mode lainnya sehingga tidak saling mempengaruhi satu sama lain. Dengan kata lain, sistem MDOF dapat diselesaikan dengan menggunakan solusi satu derajat kebebasan (SDOF) sederhana untuk mendapatkan superposisi dari respon modal.

2.2.2.3. Redaman

Redaman merupakan proses dimana getaran bebas berkurang amplitudonya (Chopra,1995). Pada redaman, energi dari sistem yang bergetar terdisipasi melalui berbagai macam mekanisme. Pada struktur gedung yang bergetar mekanisme energi yang terjadi antara lain gesekan pada sambungan baja, *opening* dan *closing microcrack* pada beton, gesekan antara struktur dengan komponen non struktural seperti dinding. Nampaknya hampir tidak mungkin untuk mengidentifikasi atau mendeskripsikan secara matematis setiap mekanisme disipasi energi yang terjadi pada struktur, sehingga untuk menentukan rasio redaman secara akurat harus dilakukan secara eksperimen. Tetapi hal tersebut jarang dilakukan karena terbatasnya waktu dan dana. Untuk struktur baru yang akan dibangun hal tersebut tidak bisa dilakukan sehingga dalam

menentukan rasio redaman suatu struktur dilakukan dengan melakukan estimasi. Newmark dan Hall (1982) menentukan rekomendasi nilai rasio redaman untuk beberapa tipe dan kondisi struktur.

Tabel 2.1. Rekomendasi Nilai Rasio Redaman Untuk Tipe dan Jenis Struktur

Stress Level	Type and condition of structure	Damping Ratio (%)
Working stress, no more than about $\frac{1}{2}$ yield point	Welded steel, prestressed concrete, well – reinforced concrete (only slight cracking)	2-3
	Reinforced concrete with considerable cracking	3-5
	Bolted and or riveted steel, wood structures with nailed or bolted joints	5-7
At or just below yield point	Welded steel, prestressed concrete (without complete loss in prestress)	5-7
	Prestressed concrete with no prestress left	7-10
	Reinforced concrete	7-10
	Bolted and or riveted steel, wood structures with bolted joints	10-15
	Wood structures with nailed joints	15-20

2.2.3. Identifikasi Parameter Modal Dengan Simulasi Numerik

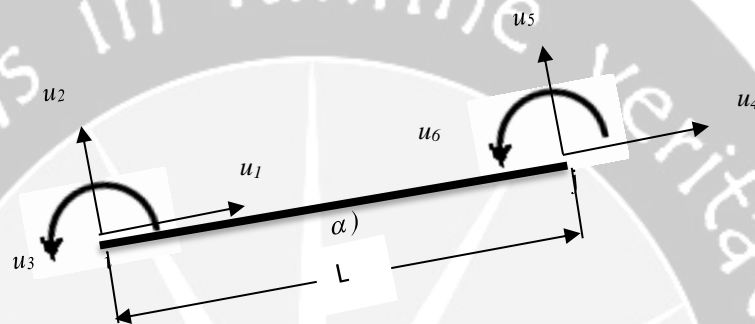
2.2.3.1. Kekakuan Struktur

a. Kekakuan Elemen Dalam Koordinat Lokal

Dalam analisis dinamik, struktur dianggap sebagai bangunan geser sehingga matriks kekakuan struktur dapat dibentuk dengan sederhana.

Walaupun demikian, kadang-kadang diinginkan model yang lebih

teliti dengan memperhitungkan pengaruh derajat kebebasan yang lebih umum. Dalam metode matriks kekakuan, suatu elemen dalam suatu portal bidang dianggap mempunyai 12 derajat kebebasan atau 6 derajat kebebasan (perpindahan bebas) per titik kumpul seperti ditunjukkan dalam Gambar 2.9.



Gambar 2.9. Perpindahan pada elemen portal bidang dan simple beam dalam koordinat lokal (Arfiadi,2016)

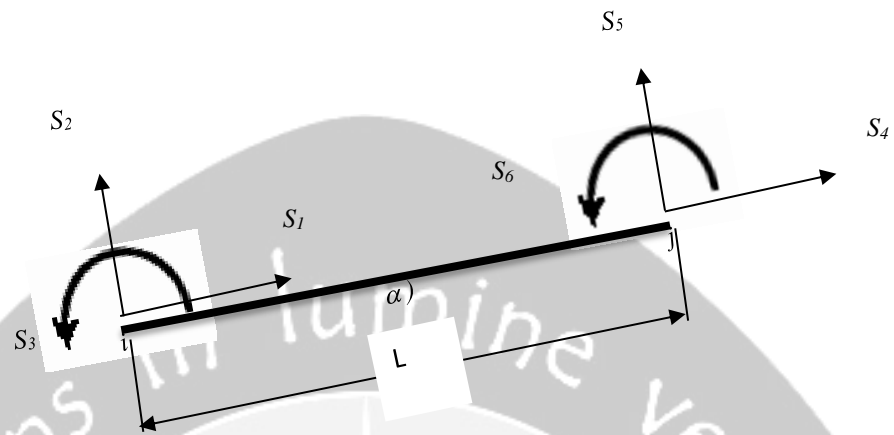
Perpindahan pada gambar 2.9. sesuai dengan gaya – gaya batang pada gambar 210. dimana S_1 = gaya aksial pada ujung – i, S_2 = gaya geser pada ujung – i, S_3 = momen pada ujung – i, S_4 = gaya aksial pada ujung – j, S_5 = gaya geser pada ujung – j dan S_6 = momen pada ujung – j.

Dengan nomor perpindahan pada gambar 2.9 dan gaya batang pada Gambar 2.10, hubungan antara gaya batang (S) dan perpindahan dalam koordinat lokal (u) dapat dinyatakan dengan :

$$[S] = [k]\{u\} \dots\dots\dots(2.10)$$

dengan $\{S\} = [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6]^T$, $\{u\} = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T$

matriks kekakuan batang (k) dalam koordinat lokal seperti terlihat pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10. Gaya - gaya pada elemen portal bidang dan simple beam dalam koordinal lokal (Arfiadi,2016)

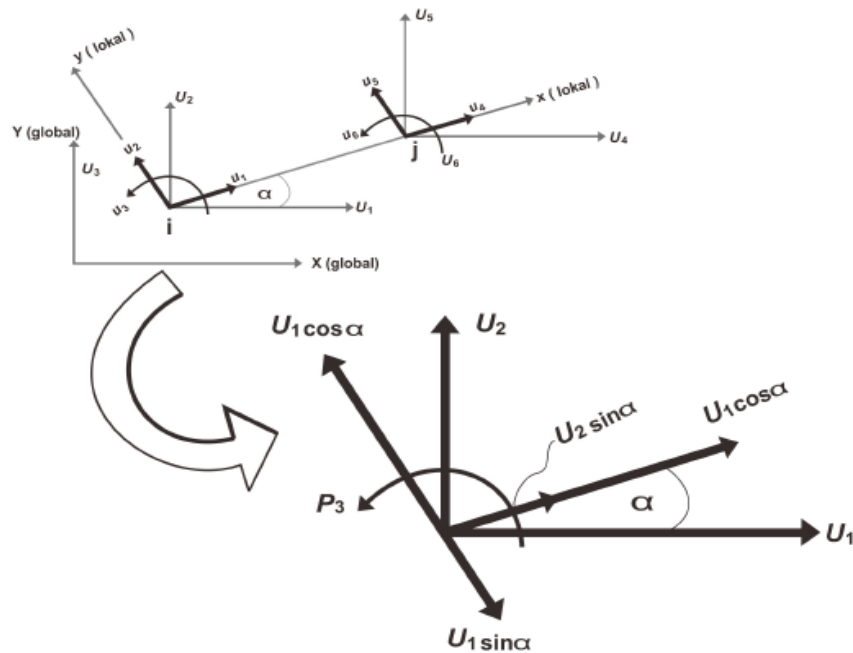
$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
 \end{bmatrix} \dots(2.11)$$

dengan E = modulus elastik bahan, A = luas tampang, L = panjang batang dan I = momen inersia batang.

b. Transformasi Perpindahan

Perpindahan dalam koordinat lokal dengan orientasi sudut sembarangan dapat ditransformasikan ke dalam perpindahan dalam koordinat global. Perpindahan dalam arah koordinat global diperlukan karena persamaan keseimbangan global dinyatakan dalam salib sumbu global X-Y. Untuk mentransformasikan

perpindahan dalam koordinat lokal ke dalam perpindahan dalam koordinat global dapat diperoleh dengan bantuan Gambar 2.11.



Gambar 2.11. Transformasi dari perpindahan {u} pada salib sumbu lokal (x,y) ke perpindahan {U} pada salib sumbu global (X,Y) (Arfiadi,2016)

Pada ujung i :

$$u_1 = U_1 \cos \alpha + U_2 \sin \alpha \dots\dots\dots(2.12a)$$

$$u_2 = -U_1 \sin \alpha + U_2 \cos \alpha \dots\dots\dots(2.12b)$$

$$u_3 = U_3 \dots\dots\dots(2.12c)$$

Pada ujung j :

$$u_4 = U_4 \cos \alpha + U_5 \sin \alpha \dots\dots\dots(2.12d)$$

$$u_5 = -U_4 \sin \alpha + U_5 \cos \alpha \dots\dots\dots(2.12e)$$

$$u_6 = U_6 \dots\dots\dots(2.12f)$$

Persamaan 2.12. dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.13)$$

Dengan $c = \sin \alpha = \frac{x_j - x_i}{L}$, $s = \cos \alpha = \frac{y_j - y_i}{L}$ dimana $x_j =$ absis ujung j,

$x_i =$ absis ujung i, $y_j =$ ordinat ujung j serta $y_i =$ ordinat ujung i.

Persamaan (2.13) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\{u\} = [T]\{U\} \dots\dots\dots(2.14)$$

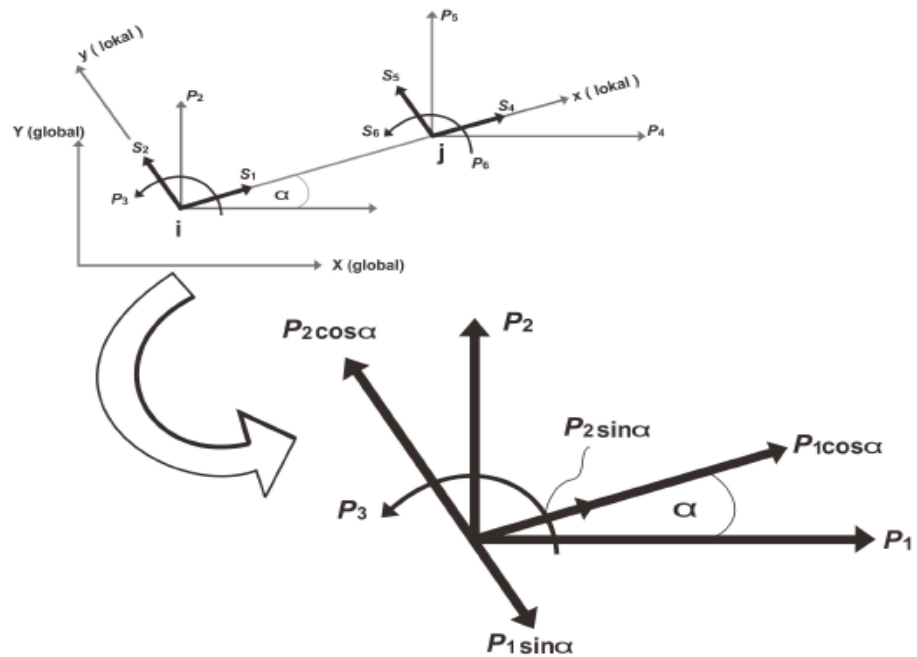
c. Transformasi Gaya

Dengan cara yang sama, gaya batang (dalam koordinat lokal) {S} dapat ditransformasikan ke dalam gaya koordinat global {P} seperti ditunjukkan gambar 2.12 menurut persamaan :

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.15)$$

Atau dalam bentuk matriks

$$\{S\} = [T]\{P\} \dots\dots\dots(2.16)$$



Gambar 2.12. Transformasi dari gaya batang $\{S\}$ pada salib sumbu lokal (x-y) ke gaya – gaya $\{P\}$ pada salib sumbu global (X-Y) (Arfiadi,2016)

d. Matriks Kekakuan Dalam Koordinat Global

Selanjutnya agar matriks kekakuan dapat dirakit kedalam matriks kekakuan struktur, matriks kekakuan dalam koordinat lokal harus ditransformasikan dulu menjadi matriks kekakuan dalam koordinat global. Matriks kekakuan dalam koordinat global dapat diperoleh sebagai berikut ini :

Substitusikan persamaan (2.14) $\{u\} = [T]\{U\}$ pada persamaan (2.10) $[S] = [k]\{u\}$ sehingga diperoleh $\{S\} = [k][T]\{u\}$, selanjutnya disubstitusikan persamaan 2.16 $\{S\} = [T][P]$ pada persamaan yang terakhir, sehingga diperoleh $[T]\{P\} = [k][T]\{U\}$, kalikan kedua ruas persamaan dengan $[T]^T$ sehingga diperoleh $[T]^T [T]\{P\} = [T]^T [k][T]\{U\}$.

Karena matriks transformasi $[T]$ adalah matriks orthogonal, yaitu

$[T]^T = [T]^{-1}$ maka persamaan diatas dapat ditulis sebagai :

$$\{P\} = [T]^T [k][T] \{U\} \dots\dots\dots(2.17)$$

Selanjutnya dengan mengambil

$$[K] = [T]^T [k][T] \dots\dots\dots(2.18)$$

Sebagai matriks kekakuan dalam koordinat global.

Persamaan (2.17) dapat ditulis sebagai :

$$\{P\} = [K] \{U\} \dots\dots\dots(2.19)$$

e. Proses Perakitan Matriks Kekakuan Struktur

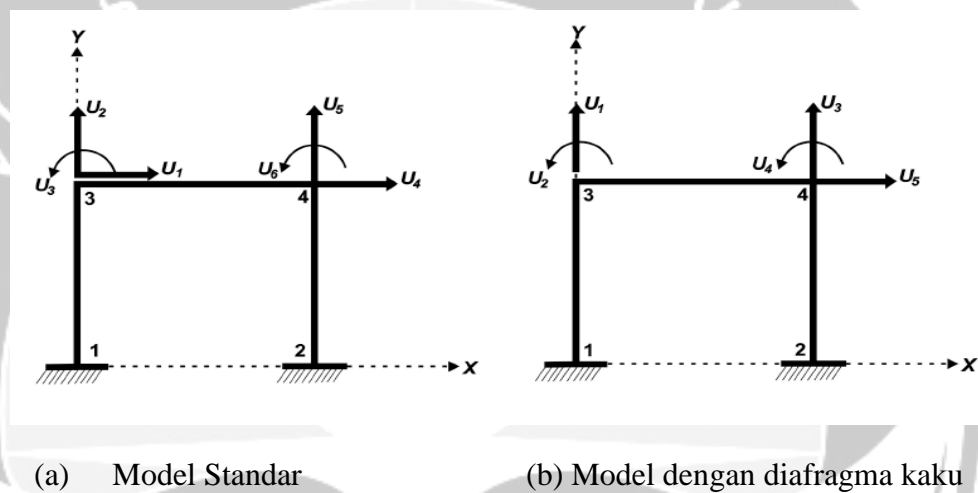
Setelah semua matriks kekakuan dalam koordinat lokal ditransformasikan menjadi matriks kekakuan dalam koordinat global menurut persamaan (2.19), matriks kekakuan setiap batang dalam koordinat global harus dirakit ke dalam matriks kekakuan struktur.

Proses perakitan dilakukan dengan memperhatikan letak matriks kekakuan masing-masing batang menurut vektor arahnya masing-masing.

2.2.3.2. Model Dengan Diafragma Kaku

Untuk struktur gedung, umumnya lantai dianggap sebagai diafragma yang kaku dalam arah horisontal. Dengan anggapan ini, setiap titik pada suatu lantai tertentu mempunyai perpindahan lateral yang sama. Dengan kata lain tidak terjadi deformasi aksial pada lantai atau deformasi aksial diabaikan. Sebagai gambaran Gambar 2.13. menunjukkan perbedaan keadaan standar dan keadaan jika lantai dianggap sebagai diafragma yang

kaku. Tampak bahwa jika pada model standar terdapat enam perpindahan bebas, pada model dengan diafragma kaku hanya terdapat lima perpindahan bebas. Dalam hal ini, karena setiap titik pada lantai mempunyai perpindahan horisontal yang sama, maka hanya terdapat satu perpindahan lateral saja yaitu perpindahan nomor 5. Artinya perpindahan horisontal pada titik 3 sama dengan perpindahan horisontal titik 4 yang di



Gambar 2.13. Perbedaan antara model standar dan model dengan diafragma kaku (Arfiadi,2016)

Untuk merakit matriks kekakuan pada model dengan lantai kaku dapat dilakukan dengan dua cara. Pertama adalah dengan merakit matriks - matriks kekakuan struktur model standar terlebih dahulu. Setelah itu matriks kekakuan dengan model diafragma kaku diperoleh dengan merakit kembali matriks kekakuan dari model standar sesuai dengan **[ID]** pada model diafragma kaku. Cara yang kedua adalah dengan merakit langsung kekakuan batang dalam koordinat global sesuai dengan **[ID]** pada model diafragma kaku.

2.2.3.3. Kondensasi Statik

Kondensasi statik dilakukan untuk mereduksi jumlah derajat kebebasan yang harus diselesaikan dalam suatu persamaan. Dengan cara ini ukuran persamaan yang harus diselesaikan menjadi jauh lebih kecil.

Misalnya ditinjau suatu persamaan keseimbangan statik :

$$[K]\{U\} = \{P\} \dots\dots\dots(2.20a)$$

Dengan partisi matriks (Arfiadi,2016) sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} [K_{cc}] & [K_{cL}] \\ [K_{Lc}] & [K_{LL}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_C\} \\ \{U_L\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_C\} \\ \{P_L\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.20b)$$

Pada persamaan (2.20b) $\{U_C\}$ adalah perpindahan yang akan dikondensasi sedangkan $\{U_L\}$ adalah perpindahan yang akan dipertahankan. Dari persamaan submatriks yang pertama diperoleh :

$$[K_{cc}]\{U_C\} + [K_{cL}]\{U_L\} = \{P_C\} \dots\dots\dots(2.21)$$

Sehingga diperoleh

$$\{U_C\} = [K_{cL}]^{-1} (\{P_C\} - [K_{cc}]\{U_L\}) \dots\dots\dots(2.22)$$

Dari persamaan submatriks yang kedua pada persamaan (2.20b) diperoleh

$$[K_{Lc}]\{U_C\} + [K_{LL}]\{U_L\} = \{P_L\} \dots\dots\dots(2.23)$$

Dengan mensubsitusikan $\{U_C\}$ dari persamaan 2.22 diperoleh

$$[K_{Lc}] [K_{cc}]^{-1} (\{P_C\} - [K_{cL}]\{U_L\}) + [K_{LL}]\{U_L\} = \{P_L\}$$

$$[K_{Lc}] [K_{cc}]^{-1} (\{P_C\} - [K_{cL}] [K_{cc}]^{-1} [K_{cL}]\{U_L\}) + [K_{LL}]\{U_L\} = \{P_L\}$$

$$[K_{Lc}] [K_{cc}]^{-1} (\{P_C\} + ([K_{cL}] - [K_{cL}] [K_{cc}]^{-1} [K_{cL}])\{U_L\}) = \{P_L\}$$

$$([K_{LL}] - [K_{Lc}] [K_{cc}]^{-1}[K_{cL}]) \{U_L\} = \{P_L\} - [K_{Lc}] [K_{cc}]^{-1} \{P_C\}$$

Atau

$$[K_{LL}] \{U_L\} = \{P_L^*\} \dots\dots\dots(2.24)$$

$$[K_{LL}^*] = [K_{LL}] - [K_{LC}] [K_{CC}]^{-1} [K_{CL}] \dots\dots\dots(2.25a)$$

$$\{P_L^*\} = \{P_L\} - [K_{LC}] [K_{CC}]^{-1} \{P_C\} \dots\dots\dots(2.25b)$$

Dalam permasalahan statik persamaan (2.24) dapat diselesaikan dulu untuk memperoleh $\{U_L\}$. Perpindahan pada derajat kebebasan yang dikondensasi kemudian dihitung dengan persamaan (2.22) sehingga semua perpindahan global dapat diperoleh.

2.2.3.4. Massa

Massa struktur dapat dianggap terpusat pada suatu titik diskritnya atau dianggap terdistribusi merata pada elemen struktur. Untuk analisis gedung sering dianggap massa gedung terpusat pada lantai - lantainya. Dalam hal ini matriks massa menjadi matriks diagonal. Sebagai contoh untuk portal bidang N lantai, maka matriks massa :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.26)$$

Selain massa terpusat, matriks massa dapat pula dibentuk dengan menganggap massa terdistribusi merata pada elemen struktur. Untuk hal ini, matriks massa dapat dibentuk dengan menggunakan fungsi bentuk yang sama seperti fungsi bentuk yang digunakan dalam matriks kekakuan.

Matriks massa dalam koordinat lokal dapat diperoleh dari :

$$[m] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 126 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22 & 4L^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.27)$$

dengan ρ = massa jenis.

Dalam koordinat global matriks massa dapat diperoleh dengan

$$[M] = [T]^T [m] [T] \dots\dots\dots(2.28)$$

Dalam analisis dinamik gedung, umumnya massa gedung dianggap terpusat pada lantai – lantainya. Untuk portal bidang N lantai maka ukuran matriks massa adalah $N \times N$. Teknik kondensasi statik dapat dipergunakan untuk mereduksi derajat kebebasan portal menjadi N , sehingga penyelesaian dapat dikerjakan dengan mudah.

Untuk gedung tiga dimensi dengan lantai yang dianggap sebagai diafragma kaku dalam arah horisontal, setiap lantai mempunyai tiga buah komponen massa, yaitu dua komponen massa transisi dan satu buah komponen massa rotasi. Dengan demikian untuk gedung bertingkat – N dimana lantai dimodelkan sebagai diafragma yang kaku, matriks massa berukuran $3N \times 3N$.

2.2.4. Identifikasi Parameter Modal dengan Metode FDD

2.2.4.1. Umum

Sistem identifikasi adalah suatu proses untuk menemukan sebuah modal eksperimental struktur dari data pengukuran vibrasi, sedangkan EMA dan OMA merupakan teknik aplikasi dari sistem identifikasi Peeters (2000). Keuntungan OMA dibanding EMA adalah menghasilkan parameter – parameter modal struktur tanpa mengetahui gaya – gaya eksitasi karena hanya memanfaatkan output pengukuran Brincker (2014). Hal inilah membuat teknik OMA lebih banyak digunakan dalam mengidentifikasi parameter modal struktur baik dalam domain waktu maupun dalam

domain frekuensi. Dalam domain waktu direpresentasikan sebagai satu set persamaan differensial sedangkan dalam domain frekuensi berupa satu set persamaan aljabar.

2.2.4.2. Domain Waktu

Persamaan gerak secara tradisional diberikan dalam domain waktu. Sistem persamaan gerak untuk *multi-degree of freedom* (MDOF) adalah :

$$[M][\ddot{y}(t)] + [C][\dot{y}(t)] + [K][y(t)] = [f(t)] \dots \dots \dots (2.29)$$

dengan $[M]$, $[C]$ dan $[K]$ masing-masing melambangkan matriks massa, redaman dan kekakuan. $[\ddot{y}(t)]$, $[\dot{y}(t)]$ dan $[y(t)]$ masing - masing melambangkan percepatan, kecepatan dan perpindahan. Sedangkan $[f(t)]$ melambangkan vektor gaya. Solusi untuk parameter dinamik dari sistem MDOF diwakili oleh mode berbeda, yang berkaitan dengan perpindahan relatif derajat sistem kebebasan. Setiap mode memiliki frekuensi alami (ω_n) dan rasio redaman (ζ).

Salah satu cara untuk mengekstrak parameter dinamik adalah memecahkan persamaan differensial 2.29. Persamaan differensial ini memiliki solusi :

$$[y(t)] = [q]e^{\lambda t} \dots \dots \dots (2.30)$$

Turunan dari perpindahan memberikan persamaan :

$$[\dot{y}(t)] = \lambda[q]e^{\lambda t} \dots \dots \dots (2.31)$$

$$[\ddot{y}(t)] = \lambda^2[q]e^{\lambda t} \dots \dots \dots (2.32)$$

Jika persamaan 2.30, persamaan 2.31 dan persamaan 2.32 dimasukkan ke dalam persamaan 2.29 dan dengan asumsi ($f(t) = 0$) memberikan persamaan :

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])q = [0] \dots \dots \dots (2.33)$$

Solusi dari persamaan 2.33 tergantung pada redaman dari sistem. Untuk sebagian besar struktur sipil redaman dari sistem *underdamped* yang berarti bahwa solusi untuk λ adalah pasangan konjugasi kompleks. Salah satu solusi adalah :

$$\lambda_k = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n i \dots \dots \dots (2.34)$$

Dimana

$$\omega_n = |\lambda_k| \dots \dots \dots (2.35)$$

$$\omega_d = \text{Im}(\lambda_k) \dots \dots \dots (2.36)$$

$$\zeta = -\frac{\text{Re}(\lambda_k)}{|\lambda_k|} \dots \dots \dots (2.37)$$

2.2.4.3. Domain Frekuensi

Dengan menerapkan transformasi *Fourier*, persamaan 2.29 menjadi satu set persamaan aljabar linear :

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])[Y(\omega)] = [F(\omega)] \dots \dots \dots (2.38)$$

Dimana

$[Y(\omega)]$ dan $[F(\omega)]$ adalah transformasi *Fourier* dari $[y(t)]$ dan $[f(t)]$ dan i adalah unit imajiner.

Dengan memperkenalkan *frequency response function* (FRF) $H(\omega)$:

$$[H(\omega)]^{-1} = -\omega^2[M] + i\omega[C] + [K] \dots \dots \dots (2.39)$$

Mensubstitusi persamaan 2.39 ke persamaan 2.38 memberikan persamaan:

$$[H(\omega)]^{-1}[Y(\omega)] = [F(\omega)] \dots \dots \dots (2.40)$$

Yang berarti bahwa FRF merupakan rasio antara transformasi *Fourier* dari input dan output :

$$[H(\omega)] = \frac{[Y(\omega)]}{[F(\omega)]} \dots \dots \dots (2.41)$$

2.2.4.4. Respons Frekuensi

a. Transformasi *Fourier*

Sebuah sinyal $y(t)$ dapat digambarkan sebagai jumlah dari sinyal harmonik. Untuk membagi sinyal kedalam komponen harmonik digunakan transformasi *Fourier*. Ini mengubah sinyal domain waktu $y(t)$ ke fungsi domain frekuensi $[Y(\omega)]$.

Untuk sinyal non periodik $y(t)$ digunakan persamaan :

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i2\pi ft} dt \dots \dots \dots (2.42)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{-i2\pi ft} d\omega \dots \dots \dots (2.43)$$

Dalam aplikasi praktis pengukuran dilakukan selama periode pengambilan sampel yang terbatas, T , dan karena itu diperlukan *discrete Fourier transformation* (DFT) bukan transformasi *Fourier* kontinyu, yang mana menghasilkan persamaan :

$$Y_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_r e^{-i2\pi \frac{kr}{N}} \dots \dots \dots (2.44)$$

$$Y_r = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-i2\pi \frac{kr}{N}} \dots \dots \dots (2.45)$$

Dimana N adalah jumlah total pengukuran, $N = T\Delta t$. Dan pengukuran N diambil sama dengan Δt dengan penomoran $r = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Dan nilai - nilai frekuensi diberi nomor $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Evaluasi persamaan 2.45 membutuhkan operasi N^2 sebagai konsekuensi pengembangan FFT, asalkan jumlah titik data sama dengan pangkat 2 (dua), jumlah operasi dikurangi menjadi $n \log_2 N$ di FFT.

b. Spektrum

1. Power Spectral Density (PSD)

PSD $[S_y(\omega)]$ memberikan representasi dari bagaimana kekuatan sinyal didistribusikan melalui frekuensinya. Untuk sinyal *stochastic* $y(t)$ merupakan fungsi korelasi R_y sehingga didefinisikan sebagai :

$$R_y(\tau) = E [y(t)y(t + \tau)] \dots \dots \dots (2.46)$$

PSD dan fungsi korelasi adalah pasangan transformasi *Fourier* :

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-i2\pi f t} dt \dots \dots \dots (2.47)$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{-i2\pi f t} d\omega \dots \dots \dots (2.48)$$

PSDS adalah fungsi bernilai nyata

2. Cross Power Spectral Density (CPSD)

CPSD $[S_{xy}(\omega)]$ memberikan representasi dari bagaimana kekuatan kovarians antara dua sinyal didistribusikan melebihi frekuensinya. Untuk dua sinyal *stochastic* $x(t)$ dan $y(t)$ fungsi korelasi silang R_{xy} adalah didefinisikan sebagai :

$$R_{xy}(\tau) = E [x(t)y(t + \tau)] \dots \dots \dots (2.49)$$

CPSD dan fungsi korelasi silang adalah pasangan dari transformasi

Fourier :

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f t} dt \dots\dots\dots(2.50)$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{-i2\pi f t} d\omega \dots\dots\dots(2.51)$$

CPSD adalah fungsi bernilai kompleks.

2.2.4.5. Metode Welch

Dalam mpsd.m metode Welch digunakan untuk memperkirakan PSD dan CPSD untuk setiap saluran pengukuran. Metode Welch dilakukan dengan membagi *time series* menjadi *section* pendek. Kemudian periodogram diestimasi dari PSD yang dihitung :

$$p_k = \frac{1}{N} Y(\omega) Y(\omega)^H \dots\dots\dots(2.52)$$

Dimana $Y(\omega)$ adalah FFT dari *time series* dan N adalah jumlah sampel dalam FFT (NFFT).

Kemudian PSD diberikan sebagai rata – rata dari periodogram sepanjang periode :

$$S_y(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K p_k \dots\dots\dots(2.53)$$

Dengan cara yang sama CPSD dapat dihitung :

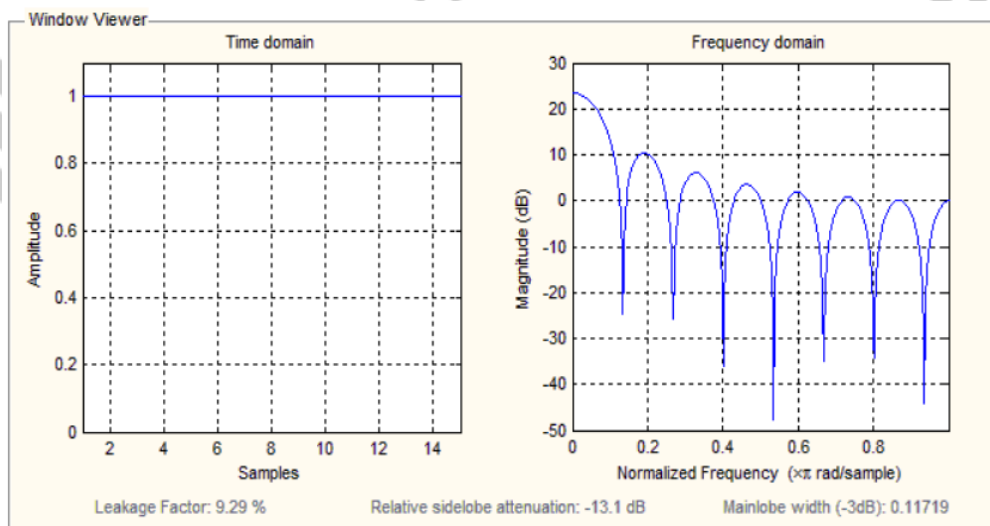
$$p_k = \frac{1}{N} X(\omega) Y(\omega)^H \dots\dots\dots(2.54)$$

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K p_k \dots\dots\dots(2.55)$$

Jika sinyal bersifat periodik, pemisahan dari *time series* harus sama dengan panjang gelombang sinyal. Jika tidak, *time series* akan mendapatkan diskontinuitas pada setiap perubahan *section*. Untuk sinyal yang bersifat non periodik akan mendapatkan diskontinuitas disepanjang *section*. Dan karena itu fungsi *windowing* diperkenalkan. Dalam fungsi matematika ini, nilai nol dihargai diluar interval yang dipilih. Sebuah rekam sederhana $x(t)$ dapat di presentasikan sebagai rekam tak terbatas $v(t)$ dikali dengan *time window* $w(t)$. Fungsi *window* yang paling sederhana adalah *rectangular window* yang diberikan sebagai :

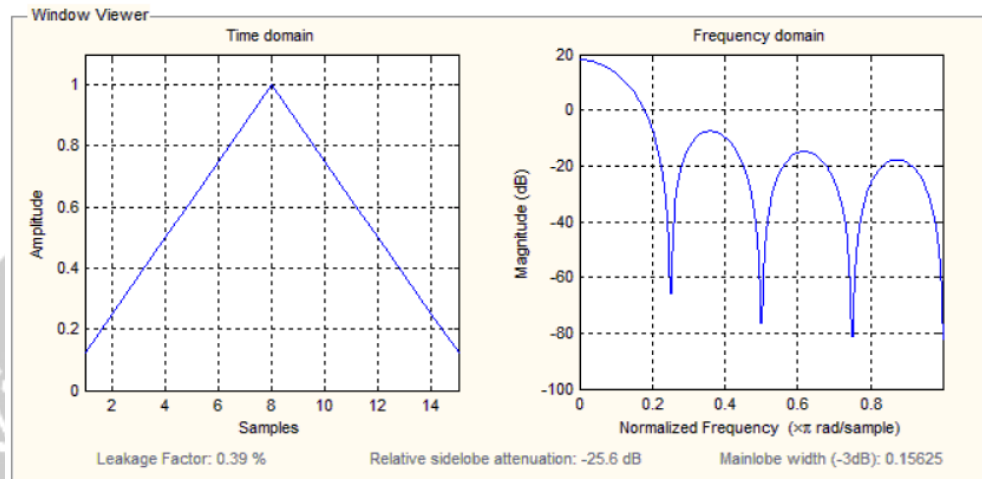
$$x(t) = w(t)v(t) \quad w(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{kondisi lain} \end{cases} \quad (2.56)$$

Namun ini tidak akan menghilangkan masalah dengan diskontinuitas sebagai nilai di tepi *section* dikalikan dengan satu. Gambar 2.14 menunjukkan fungsi *windowing* dengan 15 jumlah sampel dan pengaruhnya terhadap FFT.



Gambar 2.14 *Rectangular window*

Dengan fungsi *triangular window* dapat menghilangkan masalah diskontinuitas yang bernilai nol dibagian tepi seperti pada Gambar 2.15.

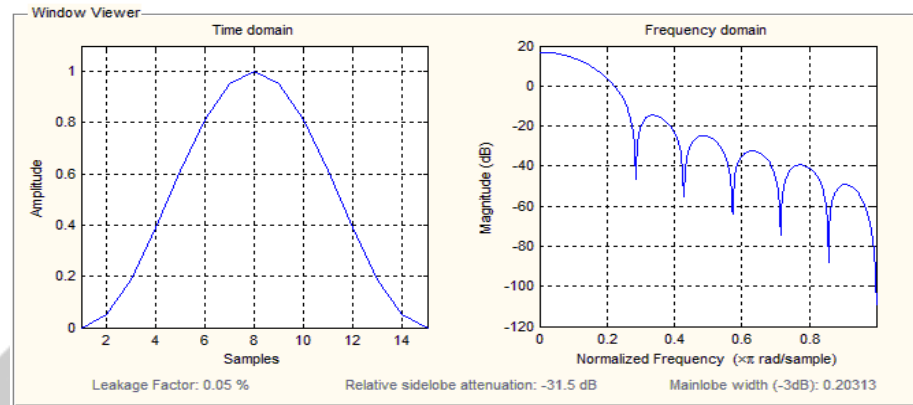


Gambar 2.15 *Triangular window*

Dalam `mpsd.m` fungsi *window* diambil sebagai input dan bebas digunakan pada setiap *windowing* yang dipilih namun memiliki kelebihan dan kekurangan yang berbeda. Dalam tesis ini *Hanning Window* yang digunakan :

$$x(t)w(t)v(t) \quad w(t) = \begin{cases} 1 - \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{kondisi lain} \end{cases} \dots\dots\dots(2.57)$$

Pengaruhnya ditunjukkan dalam pada gambar 2.16.



Gambar 2.16 Hanning window

Untuk *triangular window* dan *Hanning window*, tepi dari *window* mengalami kehilangan (*loss*), untuk itu *overlap* digunakan sebagai kompensasi. Contohnya jika dipilih *overlap* sebesar 50%, bagian kedua dari *section* pertama sama dengan bagian pertama dari *section* kedua. Karena faktor skala dari fungsi *windowing* akan berlawanan pada waktu t dalam *time series* akan mengurangi kehilangan pada bagian tepi. Ini dapat dilihat pada Gambar 2.16 .

2.2.4.6. Metode Domain Frekuensi

Metode domain frekuensi yang berkaitan dengan penelitian ini adalah metode *frequency domain decomposition* (FDD) yang dikembangkan oleh Brincker (2000). Input yang diperlukan untuk metode FDD adalah PSDs ,CPSDs dan vektor frekuensi.

Bukti teoritis perhitungan metode ini didasarkan pada ekspansi modal dari respon struktur yaitu :

$$[y(t)] = [\phi][p(t)] \dots \dots \dots 2.58$$

Dimana $[\Phi]$ adalah matriks modal dan $[p(t)]$ adalah vektor koordinat modal.

Korelasi matriks $[R_y]$ dari respon adalah :

$$[R_y(\tau)] = E [[y(t + \tau)][y(t)]^T] = [\Phi][R_p(\tau)][\Phi]^T \dots (2.59)$$

Dengan mengambil transformasi *Fourier* akan mendapatkan persamaan PSD :

$$[S_y(\omega)] = [\Phi][S_p(\omega)][\Phi]^H \dots (2.60)$$

Dalam persamaan 2.58 menunjukkan salah satu cara untuk mengumpulkan PSDs dan CPSDs pada setiap baris frekuensi. Hal ini menghasilkan matriks $l \times l$ dengan nilai – nilai untuk setiap baris frekuensi dari $1, 2, \dots, N_f$, kemudian *singular value decomposition* (SVD) menghitung setiap baris frekuensi dengan persamaan :

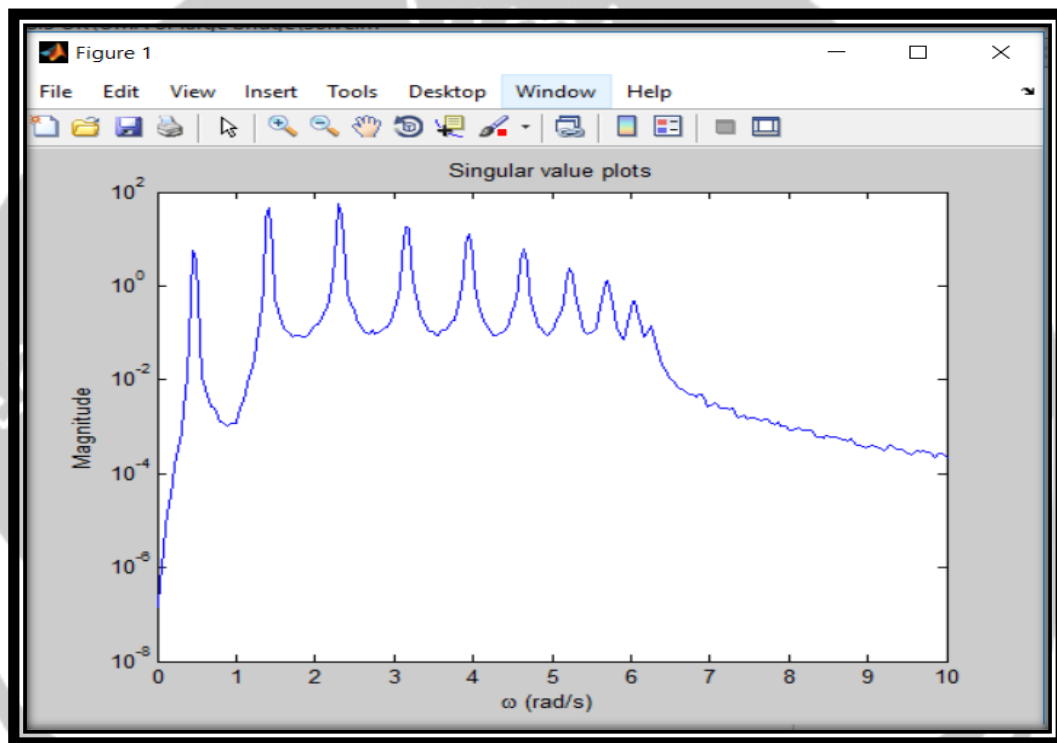
$$[S_y(\omega)] = [U][\Sigma][V]^H \dots (2.61)$$

PSD dan CPSD yang dikumpulkan untuk setiap garis frekuensi adalah matriks nol dan pasti positif, yang berarti bahwa nilai sebenarnya adalah simetris dan nilai kompleksnya sama dengan *transpose* konjugasinya sendiri. Oleh karena itu $[U] = [V]$ dan persamaan 2.61 bisa ditulis ulang :

$$[S_y(\omega)] = [U][\Sigma][U]^H \dots (2.62)$$

Pesamaan antara Persamaan 2.60 dan Persamaan 2.62 menunjukkan bahwa dapat ditemukan bentuk mode $[\Phi]$ dari $[U]$ dan nilai Singular $[S]$ sesuai dengan respon modal. Karena diurutkan dalam urutan menurun, nilai singular pertama akan memuncak mendekati resonansi. Dan kemudian dapat ditemukan bentuk mode dari baris pertama $[U]$ untuk nilai singular tersebut. Sebuah plot logaritmik dari nilai singular akan menunjukkan mode mana yang dominan. Dari plot nilai Singular dapat dipilih puncaknya.

Contoh sederhana ditunjukkan pada Gambar 2.17. bisa dengan mudah untuk memilih dua puncak yang berhubungan dengan dua mode sistem, bentuk mode kemudian dapat diekstraksi.



Gambar 2.17. Contoh plot nilai singular