

CCP_08

by Pranowo Pranowo

Submission date: 01-Aug-2019 01:23PM (UTC+0700)

Submission ID: 1156710136

File name: umerik_Getaran_Paksa_Berbasis_Pemrograman_Berorientasi_Obyek.doc (652K)

Word count: 1266

Character count: 8351

Metode Time Discontinuous Galerkin Orde Tinggi Untuk Simulasi Numerik Getaran Paksa Berbasis Pemrograman Berorientasi Obyek

Pranowo¹ & Lukito Edi Nugroho²

¹Teknik Informatika Fakultas Teknologi Industri Universitas Atma Jaya Yogyakarta
Jl. Babarsari 43, Yogyakarta 55281
E-mail : pran@mail.uajy.ac.id

²Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada
Jl. Grafika No.2, Yogyakarta 55281
E-mail : lukito@mti.ugm.ac.id

Abstrak

Paper ini membahas pengembangan metode numerik Time-Discontinuous Galerkin orde tinggi berbasis pemrograman berorientasi objek untuk simulasi sistem getaran paksa. Time-Discontinuous Galerkin yang merupakan salah satu jenis metode elemen hingga relatif masih jarang digunakan untuk penyelesaian persoalan dengan syarat awal dibanding metode beda hingga dan Runge-Kutta. Penggunaan fungsi Lagrange dengan polinomial Legendre orde tinggi sebagai fungsi basis memungkinkan orde akurasi lebih dari 4 dapat dicapai tanpa menambah kompleksitas komputasi yang tajam. Dua buah kelas utama, yaitu: Matriks dan GLLbasis dibuat untuk melakukan perhitungan numerik. Kelas Matriks disusun dari vector STL berguna untuk handle operasi matriks berikut penyelesaiannya. Sedangkan Obyek GLLbasis berguna untuk perhitungan fungsi basis dan menyediakan vektor koordinat simpul, bobot dan matriks turunan untuk berbagai order. Perbandingan dengan jawaban eksak menunjukkan bahwa metode Time-Discontinuous Galerkin mempunyai akurasi tinggi.

Kata kunci: Time-Discontinuous Galerkin, getaran paksa

1. Pendahuluan

Model matematika untuk getaran teredam berupa persamaan differensial biasa yang mengandung turunan waktu yang lebih dikenal dengan nama persoalan dengan syarat awal. Pada umumnya penyelesaian numerik untuk persamaan tersebut menggunakan metode beda hingga dan Runge-Kutta. Pengembangan metode beda hingga untuk orde akurasi lebih dari 2 sukar dilakukan. Pengembangan metode ini secara eksplisit maupun implisit untuk berbagai orde akurasi dapat dilihat pada Ghrist (1998). Sedangkan metode Runge-Kutta susah dikembangkan untuk orde akurasi lebih dari 5, karena kompleksitasnya meningkat tajam seiring meningkatnya orde akurasi. Sehingga metode Runge-Kutta dengan orde lebih dari 5 dianggap tidak efisien.

Metode elemen hingga yang penggunaannya hampir menjangkau semua bidang aplikasi, relatif jarang mendapat perhatian untuk dikembangkan untuk penyelesaian persoalan dengan syarat awal karena masih sering dianggap bahwa metode ini hanya untuk permasalahan struktur/konstruksi. Usaha-usaha untuk mengembangkan metode ini untuk persoalan dengan syarat awal telah dilakukan oleh Park (1996) dan Bauer (1995). Park menggunakan berbagai macam polinomial, yaitu: Hermite, Legendre dan Chebyshev sebagai fungsi basis. Park menerapkan metode elemen hingga untuk menyelesaikan permasalahan di bidang sistem kendali. Untuk mendapatkan sistem persamaan aljabar, Park menggunakan prosedur Galerkin. Sedangkan Brauer menggunakan Discontinuous Galerkin, tetapi fungsi basis yang digunakan terbatas hanya sampai polinomial biasa orde 3 (kubik).

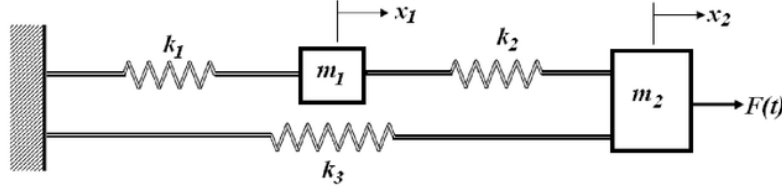
Metode Discontinuous Galerkin merupakan metode elemen hingga dengan fungsi basis yang diskontinu pada sisi-sisi elemen. Kontinuitas antar elemen dijaga dengan menambahkan fluks seperti pada metode volume hingga. Metode ini cocok untuk persoalan yang mengandung diskontinuitas.

Paper ini dalam perhitungannya menggunakan metode Discontinuous Galerkin untuk diskretisasi waktu pada persamaan model getaran paksa, sehingga metode tersebut disebut Time-Discontinuous Galerkin. Sedangkan fungsi basis yang digunakan adalah fungsi Lagrange dengan polinomial Legendre orde tinggi. Integrasi persamaan aljabarnya dilakukan dengan kuadratur Gauss Lobatto-Legendre. Pemrograman berorientasi objek digunakan untuk implementasi perhitungan numerik ke dalam program komputer karena mempunyai ekstensibilitas yang tinggi.

2. Formulasi

2a. Persamaan Model Sistem Getaran Paksa

Sistem getaran paksa yang ditinjau adalah sistem dengan dua derajat kebebasan seperti berikut (Meirovitch, 1986) :



Gambar 1. Sistem Getaran Paksa

dengan (k_1, k_2, k_3) adalah konstanta kekakuan pegas, (m_1, m_2) adalah massa, (x_1, x_2) adalah peralihan (*displacement*), t adalah waktu dan $F(t)$ adalah gaya paksa. Persamaan model untuk sistem di atas adalah:

$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \quad (1a)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = F(t) \quad (2a)$$

Sistem persamaan persamaan di atas agar dapat diselesaikan dengan metode Time-Discontinuous Galerkin diubah menjadi sistem persamaan diferensial biasa berorde 1 dengan menambahkan variabel kecepatan :

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = v_1(t) \quad \text{dan} \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = v_2(t) \quad (3)$$

Sehingga persamaan model di atas menjadi:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (4)$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$

2b. Metode Time-Discontinuous Galerkin Orde Tinggi

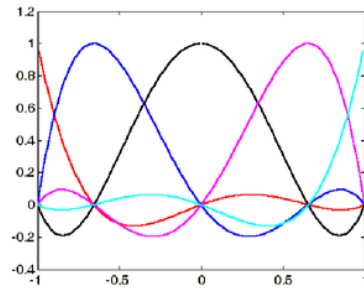
Persamaan (3) diambil sebagai contoh untuk diskretisasi dengan metode Time-Discontinuous Galerkin (TDG). Domain waktu dibagi menjadi sejumlah interval/elemen, pada setiap elemen waktu ini variabel peralihan dan kecepatan diekspansi menggunakan fungsi Lagrange dengan polinomial Legendre orde tinggi (Sherwin & Kamiadakis, 1999):

$$x_1 = \sum_{i=0}^m h_i(t)(x_1)_i = [h][x_1]$$

$$v_1 = \sum_{i=0}^m h_i(t)(v_1)_i = [h][v_1]$$
(5)

Fungsi Lagrange dengan polinomial Legendre dengan orde- m

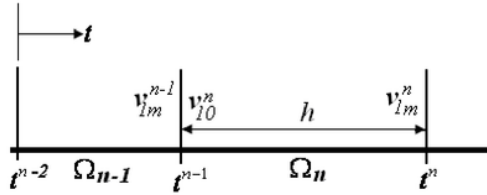
$$h_i(x) = \frac{(x^2 - 1)L'_m(x)}{m(m+1)L_m(x_i)(x - x_i)}$$
(6)



Gambar 2. Fungsi Lagrange dengan polinomial Legendre orde-4

Setelah proses ekspansi dilakukan selanjutnya adalah integrasi sesuai dengan Galerkin prosedur dan menambahkan flux untuk menjaga kontinuitas:

$$\int_{\Omega} [h] \left(\frac{dx_1}{dt} - v_1 \right) dt + (x_{10}^n - x_{1m}^{n-1}) = 0$$
(7)



Gambar 3. Diskretisasi waktu

Koordinat global (t) ditransformasi ke dalam koordinat lokal (ξ), setiap elemen $\Omega_n = [t^{n-1}, t^n]$ ditransformasi ke dalam elemen $\Omega_n = [-1, 1]$.

$$t = \frac{h\xi + t^{n-1} + t^n}{2}$$
(8)

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{h}{2}, \quad dt = \frac{dt}{d\xi} d\xi = \frac{h}{2} d\xi$$

Sehingga persamaan (3) menjadi :

$$\int_{-1}^1 [h(\xi)]^T \frac{d}{d\xi} [h(\xi)] [x_1^n] d\xi - \frac{h}{2} \int_{-1}^1 [h(\xi)]^T [h(\xi)] [x_1^n] d\xi + [h(\xi = -1)]^T [h(\xi = -1)] [x_1^n] = \text{RHS}_1 \quad (9)$$

$$\text{RHS}_1 = [x_{1m}^{n-1} \quad 0 \quad - \quad - \quad 0]^T$$

Integrasi di atas dilakukan secara numerik dengan kuadratur Gauss Legendre-Lobatto.

$$\mathbf{W} \mathbf{D} \begin{bmatrix} x_{10}^n \\ x_{10}^n \\ - \\ - \\ x_{1m}^n \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \mathbf{W} \begin{bmatrix} v_{10}^n \\ v_{10}^n \\ - \\ - \\ v_{1m}^n \end{bmatrix} + \mathbf{F}_L \begin{bmatrix} x_{10}^n \\ x_{10}^n \\ - \\ - \\ x_{1m}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1m}^{n-1} \\ 0 \\ - \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

\mathbf{W} adalah matriks bobot, \mathbf{D} adalah matriks turunan dan \mathbf{F}_L adalah matriks fluks

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_0 & - & - & - & 0 \\ 0 & \omega_1 & - & - & - \\ - & - & . & - & - \\ - & - & - & . & - \\ 0 & - & - & - & \omega_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{\partial h_j(\xi_i)}{\partial \xi} \begin{cases} \frac{L_m(\xi_i)}{L_m(\xi_j)(\xi_i - \xi_j)} & \text{if } i \neq j \\ 0 & \text{if } i = j, i \neq 0, m \\ \frac{-m(m+1)}{4} & \text{if } i = j = 0 \\ \frac{m(m+1)}{4} & \text{if } i = j = m \end{cases} \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_L = \begin{bmatrix} 1 & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

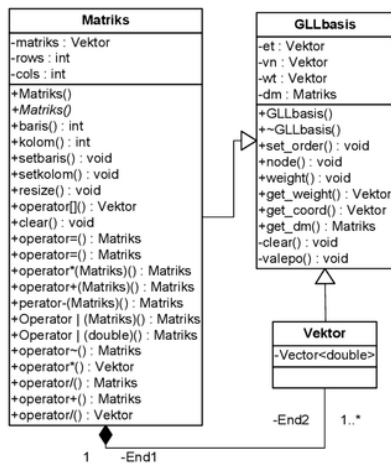
Persamaan yang lain dipecah dalam bentuk diskret dengan cara yang sama sehingga diperoleh sistem persamaan linier simultan:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} \mathbf{D} + \mathbf{F}_L & 0 & -\mathbf{W} & 0 \\ - & \mathbf{W} \mathbf{D} + \mathbf{F}_L & 0 & -\mathbf{W} \\ \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\mathbf{W} & -\frac{h}{2}k_2\mathbf{W} & m_1\mathbf{W} \mathbf{D} + \mathbf{F}_L & 0 \\ -\frac{h}{2}k_2\mathbf{W} & \frac{h}{2}(k_2 + k_3)\mathbf{W} & 0 & m_2\mathbf{W} \mathbf{D} + \mathbf{F}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x_1^n] \\ [x_2^n] \\ [v_1^n] \\ [v_2^n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{RHS}_1 \\ \text{RHS}_2 \\ \text{RHS}_3 \\ \text{RHS}_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

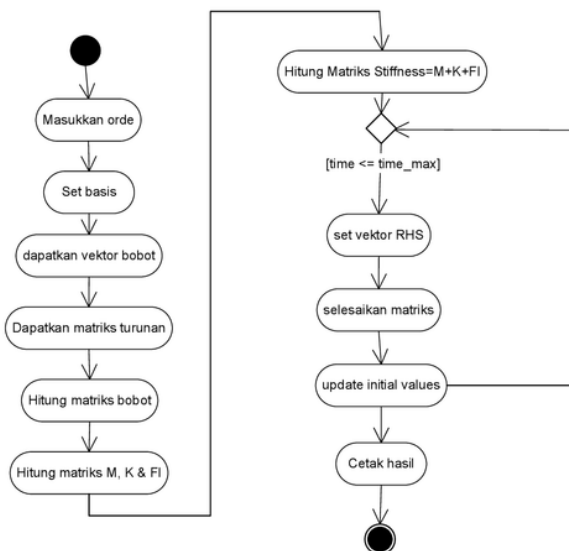
3. Pemrograman Berorientasi Objek

Tema pokok dalam pemrograman berorientasi objek adalah abstraksi data dan pewarisan (*inheritance*) (<http://vector-space.com/index.html>; Lafore, 2002). Dengan menggunakan abstraksi data maka suatu modul dalam perangkat lunak dapat memodelkan suatu objek dalam dunia nyata sedekat mungkin. Modul yang dinyatakan dalam bentuk kelas mempunyai anggota yang berupa data dan fungsi/metode. Dengan demikian kelas yang merupakan *template* dari objek mempunyai suatu sifat atau keadaan yang dinyatakan dengan data anggota dan perilaku yang dinyatakan dengan fungsi anggota. Untuk melindungi anggota data maupun fungsi dalam suatu kelas, maka kedua anggota tersebut dienkapsulasi, selain sebagai pelindung enkapsulasi juga untuk menyembunyikan kompleksitas kelas tersebut dari pihak luar kelas. Dengan konsep pewarisan suatu kelas dapat diperluas dengan cara mewarisi data maupun metode dari kelas yang lebih tinggi tingkatannya. Konsep ini mendukung penggunaan ulang suatu kelas (*code reuse*) yang sudah mapan untuk membangun suatu perangkat lunak yang baru.

Dalam paper ini 2 buah kelas utama, yaitu: Matriks dan GLLbasis dibuat untuk melakukan perhitungan numerik. Kelas Matriks disusun dari vector Standard Template Library (STL) bertipe double dan berguna untuk melakukan operasi matriks berikut penyelesaiannya. Penggunaan STL ini disebabkan karena STL mempunyai kualitas yang bagus dibanding jika matriks dibuat dengan menggunakan pointer yang rentan terhadap kesalahan. Sedangkan Obyek GLLbasis berguna untuk perhitungan fungsi basis dan menyediakan vektor koordinat lokal, bobot dan matriks turunan untuk berbagai order. Gambar 3 menunjukkan diagram kelas UML dari perangkat lunak yang dibuat, lengkap dengan data dan metode yang ada.



Gambar 3. Diagram Kelas



Gambar 4. Diagram Aktivitas

4. Hasil dan Pembahasan

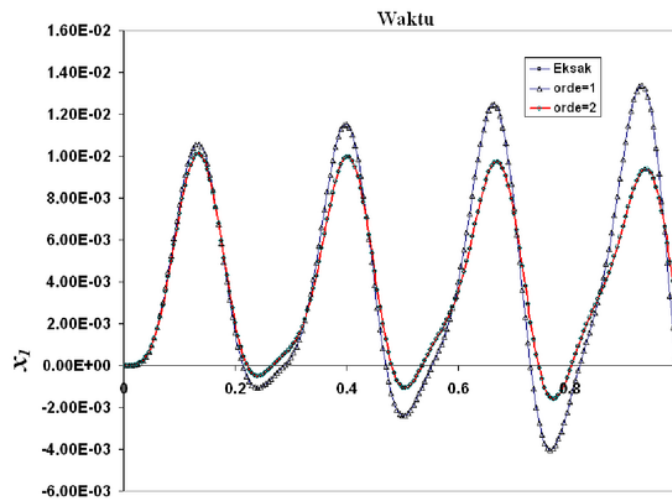
Simulasi getaran paksa dilakukan dengan nilai : $k_1 = k_2 = k_3 = k = 900 \text{ kg}$, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$ dan $F = 10u(t) \text{ N}$, $u(t)$ adalah fungsi unit step. Waktu simulasi mulai dari 0 sampai 1 dengan langkah waktu $h = 0.005$. Jawaban eksak dari simulasi ini adalah (Meirovitch, 1986):

$$x_1(t) = \frac{F_0}{k} \left(d_1 \left(1 - \cos \left(w_1 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right) + d_2 \left(1 - \cos \left(w_2 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right) \right) \quad (13)$$

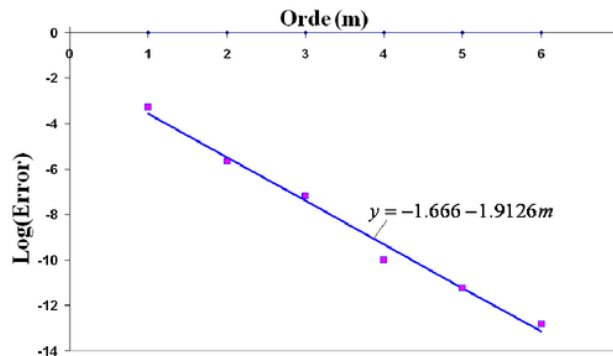
$$w1 = 0.79622521 \quad 701813 \quad , \quad w2 = 1.53818900 \quad 132085$$

$$d1 = 0.45534180 \quad 126148 \quad , \quad d2 = -0.12200846 \quad 792815$$

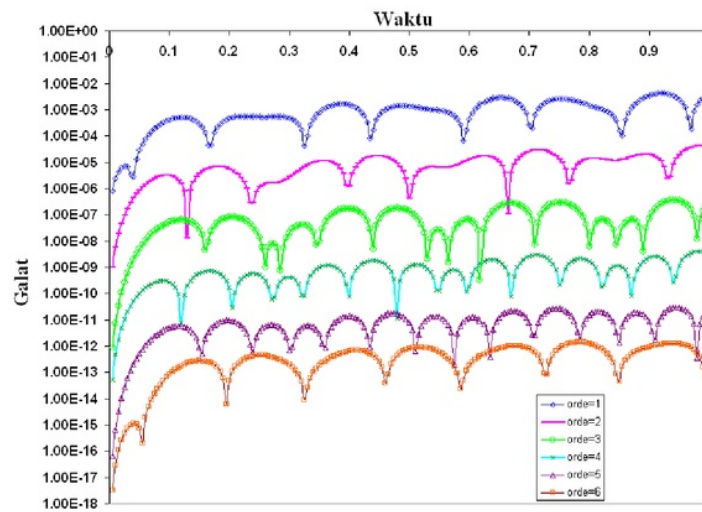
Gambar 5 menunjukkan amplitudo peralihan x_1 , dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa metode TDG orde-1 mempunyai galat (*error*) paling besar. Jika orde dinaikkan maka galat langsung turun drastis, sehingga kurva untuk jawaban eksak dan TDG orde-2 berhimpit rapat sukar untuk dibedakan. Gambar 7 menunjukkan juga bahwa semakin tinggi orde TDG maka semakin kecil galat yang ada. Sedangkan gambar 6 menunjukkan bahwa kenaikan 1 tingkat orde TDG maka akurasi meningkat sebesar 1.91. Gambar 8 dan 9 menunjukkan pengaruh langkah waktu terhadap perhitungan, gambar 8 menunjukkan bahwa semakin besar langkah waktu yang digunakan maka galat perhitungan itu meningkat. Meskipun demikian perhitungan numerik tetap stabil, hal ini memang terjadi pada skema implisit termasuk metode TDG.



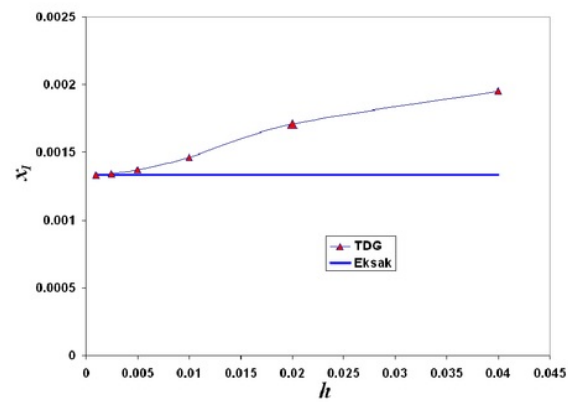
Gambar 5. Peralihan x_1 vs. Waktu



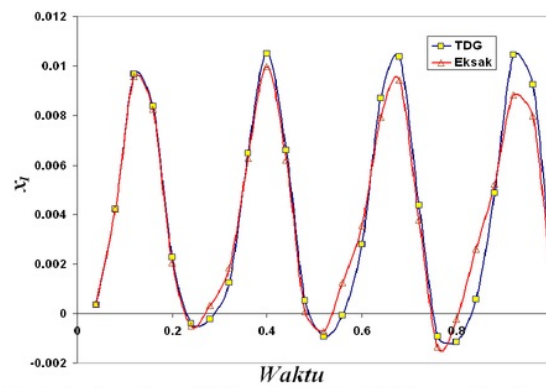
Gambar 6. Orde Akurasi pada time = 0.115 s



Gambar 7. Error vs. Waktu



Gambar 8. Hubungan langkah waktu (h) dengan akurasi pada time =1.0 dan orde-2



Gambar 8. Perbandingan TDG orde-2 & $h=0.04$ dengan Jawaban Eksak

5. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat ditarik dari paper ini adalah :

- a. Sistem getaran Paksa dapat disimulasikan dengan baik
- b. Metode Time Discontinuous Galerkin untuk kasus simulasi getaran paksa pada paper ini mempunyai akurasi eksponensial dengan slope: 1.91.
- c. Pemrograman berorientasi objek dapat diterapkan dengan baik dan mempermudah penyusunan perangkat lunak simulasi.

6. Daftar Pustaka

Anonim, Workbook for Applications in VectorSpace C++ Library : Vector Space Programming.
<http://vector-space.com/index.html> (last visit : 12 Agustus 2006)

Bauer, Russel E., 1995, Discontinuous Galerkin Methods for Ordinary Differential Equations, M.Sc. Thesis, University Colorado at Denver.

Ghrist, Michelle, 1998, Higher-Order Finite Difference for Wave Equations, Ph.D. Thesis, University Colorado at Boulder.

Kaniadakis, George E., and Sherwin, Spencer I., 1999, *Spectral/hp Element Methods for CFD*, Oxford University Press, New York.

Lafore, Robert, 2002, Object-Oriented Programming in C++, Techmedia SAMS, New Delhi.

Meirovitch, Leonard, 1986, Elements of Vibrational Analysis, Mc-Graw Hill Book Co., Singapore.

Sungho, Park., 1996, Development and Finite Elements in Time Domain, Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.

ORIGINALITY REPORT

11%

SIMILARITY INDEX

8%

INTERNET SOURCES

3%

PUBLICATIONS

6%

STUDENT PAPERS

MATCH ALL SOURCES (ONLY SELECTED SOURCE PRINTED)

3%

★ repository.unpar.ac.id

Internet Source

Exclude quotes Off

Exclude bibliography Off

Exclude matches Off

FINAL GRADE

/0

GENERAL COMMENTS

Instructor

PAGE 1

PAGE 2

PAGE 3

PAGE 4

PAGE 5

PAGE 6

PAGE 7

PAGE 8