

# C3\_03\_JTI\_Juli\_2007

*by* Pranowo Pranowo

---

**Submission date:** 08-Aug-2019 09:19AM (UTC+0700)

**Submission ID:** 1158486100

**File name:** 01-JTI\_Juli\_2007\_Pranowo.pdf (1.14M)

**Word count:** 1790

**Character count:** 10092

2

*Studi Gelombang Akustik dengan Metode Discontinuous Galerkin Orde Tinggi dalam Mesh Tidak Berstruktur*  
(Pranowo)

2

## **Studi Gelombang Akustik dengan Metode *Discontinuous Galerkin* Orde Tinggi dalam Mesh Tidak Berstruktur**

### **Pranowo**

Program Studi Teknik Informatika, Fakultas Teknologi Industri, Universitas Atma Jaya Yogyakarta  
Jl. Babarsari 43, Yogyakarta 55281  
E-mail : pran@mail.uajy.ac.id

### **Abstract**

*This paper presents the study of acoustic wave propagations in two dimensional domains with unstructured nodal high-order Discontinuous Galerkin (DG) method. The DG method employs triangular elements and uses piecewise high-order Koornwinder Dubiner polynomials for spatial discretization and low storage fourth order Runge Kutta for time integrations. Fluxes are calculated by using upwind fluxes. After demonstrating the exponential convergence of the DG method, the acoustic wave propagations in complex domains are studied.*

*Keywords: Acoustic wave propagation, discontinuous Galerkin, triangular elements.*

### **1. Pendahuluan**

Gelombang akustik merupakan gelombang mekanik yang merambat dalam media fluida gas maupun cair. Studi gelombang akustik sudah dikenal manusia sejak jaman purba, manusia menciptakan alat musik untuk menghasilkan gelombang akustik yang indah untuk didengar. Bangsa Yunani dan Romawi mempelajari gelombang akustik untuk merancang bangunan teater. Pada masa sekarang, studi gelombang akustik dilakukan dengan cara eksperimental dan simulasi numerik dengan komputer.

Studi gelombang akustik dengan metode numerik intensif dikembangkan karena metode ini relatif murah dibanding metode eksperimen dan hasilnya dekat dengan hasil eksperimen. Metode numerik yang umum dipakai adalah metode beda hingga (Schneider and Ramahi, 1998) dan wavelet (Pranowo, 2002; Pranowo dan Soesianto, 2004). Kedua metode tersebut terbatas untuk domain berbentuk kotak, sehingga untuk domain berbentuk kompleks kedua metode tersebut tidak dapat digunakan. Metode elemen hingga cocok untuk mengatasi domain yang kompleks, metode ini sering digunakan untuk studi gelombang akustik dalam kawasan frekuensi (*frequency domain*). Untuk simulasi dalam kawasan waktu, metode elemen hingga mengalami galat dispersi yang tinggi, sehingga sulit untuk simulasi dalam rentang waktu yang panjang. Metode elemen hingga terus dikembangkan untuk memperbaiki kelemahan tersebut, salah satu varians dari metode elemen hingga yang cocok untuk pemodelan perambatan gelombang adalah metode *Discontinuous Galerkin*. Perbedaan utama metode ini dengan metode elemen hingga konvensional adalah, *Discontinuous Galerkin* tidak mempertahankan kesinambungan (*continuity*) nilai variabel antar elemen pada setiap sisi elemen. Sebagai kompensasinya, hubungan antar elemen dilakukan dengan perhitungan fluks. Dengan demikian konservasi massa dan momentum terjaga. Perhitungan fluks tersebut mengadopsi dari perhitungan fluks metode volume hingga (Hirsch, 1988) yang sudah terbukti handal untuk perhitungan gelombang kejut pada aliran gas berkecepatan tinggi.

Untuk meningkatkan akurasi, metode *Discontinuous Galerkin* menggunakan polinomial ortogonal Jacobi orde tinggi, termasuk diantaranya polinomial Legendre dan Chebyshev (Hesthaven and Warburton, 2002; 2004). *Mesh* tidak berstruktur dengan elemen berbentuk segitiga dipakai untuk meningkatkan fleksibilitas. Fungsi Koorwinder Dubiner digunakan sebagai fungsi basis, fungsi ini merupakan polinomial Jacobi dalam segitiga. Fungsi tersebut dihitung pada simpul Gauss-Lobato-Legendre dalam segitiga.

## 2. Formulasi

Persamaan Akustik yang ditulis dalam bentuk tanpa dimensi adalah seperti berikut (Pranowo, 2002):

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $t$  : waktu tanpa dimensi
- $x, y$  : koordinat tanpa dimensi
- $p$  : tekanan
- $u$  : kecepatan horisontal
- $v$  : kecepatan vertikal

Diskretisasi ruang dengan *Discontinuous Galerkin* untuk persamaan di atas dilakukan mengalikan persamaan (1) dengan fungsi basis diteruskan dengan integrasi per bagian (Warburton, 2003):

$$\left( \phi, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \left( \phi, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right)_{\Omega} + \left( \phi, \mathbf{A} n_x \mathbf{q} + \mathbf{B} n_y \mathbf{q} \right)_{\partial \Omega} - \left( \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \phi), \mathbf{q} \right)_{\partial \Omega} - \left( \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{B} \phi), \mathbf{q} \right)_{\Omega} = 0$$

Suku kedua menyatakan integrasi fluks pada batas elemen, tanda  $(\cdot, \cdot)$  menyatakan  $L^2$  inner product dan  $\phi$  adalah fungsi basis

$$\left( \phi, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right)_{\Omega} + \left( \phi, \mathbf{A} n_x \mathbf{q}^- + \mathbf{B} n_y \mathbf{q}^- \right)_{\partial \Omega} - \left( \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \phi), \mathbf{q} \right)_{\partial \Omega} - \left( \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{B} \phi), \mathbf{q} \right)_{\Omega} = 0$$

Dengan memodifikasi fluks :  $\mathbf{q}^-|_{\partial \Omega} = \hat{\mathbf{q}}^-(\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+)|_{\partial \Omega}$  dan integrasi sekali lagi maka persamaan di atas menjadi :

2

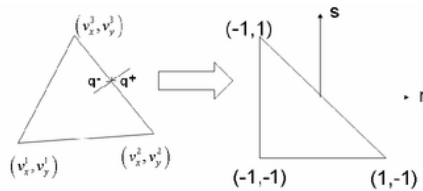
*Studi Gelombang Akustik dengan Metode Discontinuous Galerkin Orde Tinggi dalam Mesh Tidak Berstruktur*  
(Pranowo)

$$\left( \phi, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} \right)_{\Omega} + (\phi, \mathbf{A} n_x + \mathbf{B} n_y) (\mathbf{q} - \mathbf{q}^-)_{\partial \Omega} = 0 \quad (3)$$

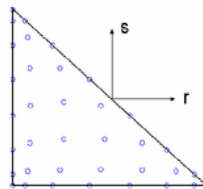
Fungsi basis adalah fungsi Korwinder Dubiner dalam segitiga:

$$\phi_{ij}(r,s) = \sqrt{\frac{2i+1}{2}} \sqrt{\frac{2i+2j+2}{2}} P_i^{0,0} \left( \frac{2(1+r)}{(1-s)} - 1 \right) P_j^{2i+1,0}(s) \quad (4)$$

$P^{\alpha,\beta}$  adalah polinomial ortogonal Jacobi



Gambar 1. Transformasi Koordinat



Gambar 2. Simpul Gauss Lobatto Quadrature orde-7

Untuk menyelesaikan persamaan 3, maka semua  $\mathbf{q} = (p \ u \ v)^T$  diekspansikan dengan fungsi basis di atas, ekspansi tekanan diambil sebagai contoh:

$$p(r,s) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \phi_{ij}(r,s) \bar{p}_{ij} \quad (5)$$

$$p(r_n, s_n) = \sum_{m=1}^{m=M} \mathbf{V}_{nm} \hat{P}_m \quad (6)$$

$$\hat{P}_m = \sum_{j=1}^{j=M} (\mathbf{V}^{-1})_{mj} p(r_j, s_j)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r, s) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial r}(r, s) \hat{P}_{ij} = \hat{\mathbf{D}}^r \mathbf{V}^{-1} p(r, s) \quad \hat{\mathbf{D}}^r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s}(r, s) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial s}(r, s) \hat{P}_{ij} = \hat{\mathbf{D}}^s \mathbf{V}^{-1} p(r, s) \quad \hat{\mathbf{D}}^s = \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

$\mathbf{V}_{ij}$  matriks Vandermonde, dan  $N$  adalah orde polinomial Jacobi

Untuk integrasi persamaan 3 dapat dilakukan secara eksak dan numerik, integrasi luasan dilakukan secara eksak sedangkan integrasi keliling dilakukan secara numerik dengan kuadratur Gauss Lobatto Legendre. Jika polinomial yang diintegrasikan berorde di bawah atau sama dengan  $(2N - 1)$  maka kuadratur tersebut adalah eksak.

Perhitungan fluks pada suku kedua persamaan 3 menggunakan fluks jenis *upwind*, yang dihitung seperti berikut:

$$(\phi, \mathbf{A}n_x + \mathbf{B}n_y)(\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^-)_{\partial\Omega} = (\phi, \mathbf{RDR}^{-1})(\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^-)_{\partial\Omega} \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_1 + |\lambda_1|) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda_2 + |\lambda_2|) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_3 + |\lambda_3|) \end{bmatrix}$$

Vektor  $\mathbf{R}$  dan  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  adalah eigen *vector* dan eigen *value* dari matriks  $\mathbf{A}n_x + \mathbf{B}n_y$ . Syarat batas untuk tekanan dan kecepatan pada dinding keras adalah seperti berikut:

$$p^+ = p^-, u^+ = -u^- \text{ dan } v^+ = -v^- \quad (9)$$

Integrasi waktu menggunakan metode *low storage* Runge-Kutta versi Carpenter dan Kennedy (1994). Perhitungan ini mempunyai 5 tingkat perhitungan dengan akurasi berorde-4, metode ini hanya memerlukan 2 tingkat penyimpanan data.

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = L[t, \mathbf{q}(t)] \quad (10)$$

Tahap perhitungan persamaan di atas menggunakan Runge-Kutta di atas adalah:

2

*Studi Gelombang Akustik dengan Metode Discontinuous Galerkin Orde Tinggi dalam Mesh Tidak Berstruktur*  
(Pranowo)

$$\begin{aligned} d\mathbf{q}_j &= A_j d\mathbf{q}_{j-1} + hL(\mathbf{q}_j) \\ \mathbf{q}_j &= \mathbf{q}_{j-1} + B_j + d\mathbf{q}_j \end{aligned} \quad (11)$$

$A_j$  dan  $B_j$  : koefisien Runge-Kutta

### 3. Hasil dan Pembahasan

Metode *Discontinuous Galerkin* yang dijabarkan di atas diimplementasikan ke dalam program komputer menggunakan *software* modifikasi dari *software* USEME versi Matlab dari Brown University.

#### a. Perbandingan dengan jawaban eksak

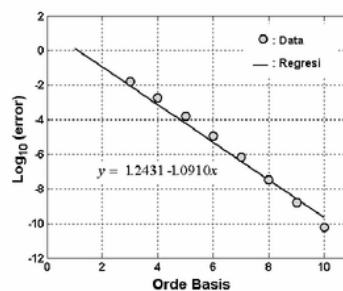
Untuk mengevaluasi akurasi metode *Discontinuous Galerkin*, hasil perhitungan numerik dibandingkan dengan jawaban eksak:

$$p(x, y, t) = \cos(1,5\pi x) * \cos(1,5\pi y) * \cos(1,5\sqrt{2}\pi t); \quad 0 \leq x, y \leq 2 \quad (12)$$

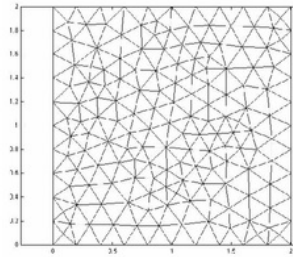
Hasil perbandingan dapat dilihat apada gambar 3, dari gambar tersebut bahwa galat berkurang secara eksponen seiring dengan bertambahnya orde basis. Galat (*error*) dihitung berdasarkan rumus:

$$error = \max |p_{numerik} - p_{eksak}| \quad (13)$$

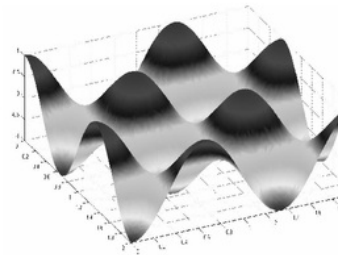
Gambar 4 memperlihatkan *mesh* yang digunakan terdiri dari 312 elemen dan gambar 5 memperlihatkan distribusi tekanan pada saat  $t = 2,282$ .



Gambar 3. Orde Basis vs. Galat



Gambar 4. Mesh



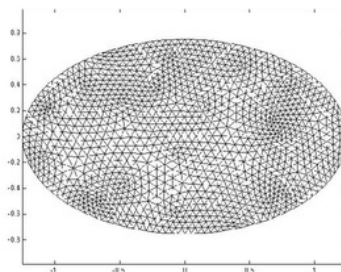
Gambar 5. Tekanan saat  $t = 2,282$

**b. Perambatan Gelombang Akustik dalam Ruang Berbentuk *Elips***

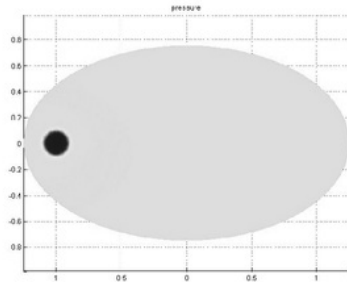
Pada bagian ini domain yang digunakan berbentuk *elips* dengan sumbu panjang = 1,25 dan sumbu pendek = 0,75. Jumlah elemen yang digunakan adalah : 2464 elemen dengan orde basis=6. Syarat awal untuk kecepatan adalah nol dan untuk tekanan adalah fungsi Gaussian dengan pusat terletak pada koordinat fokus *elips* (-1,0) :

$$p(x,y,0) = e^{-300((x+1)^2 + y^2)} \quad (14)$$

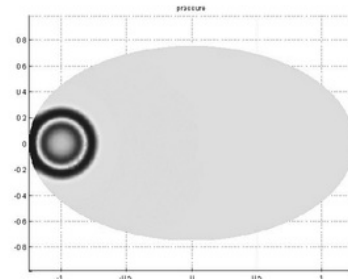
Dengan demikian perambatan gelombang akustik berawal dari fokus kiri dan secara teori akan merambat ke segala arah dan dipantulkan menuju fokus *elips* sebelah kanan, gambar 7a – 7e memperlihatkan fenomena tersebut:



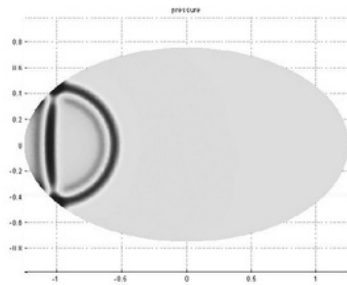
Gambar 6. Mesh *Elips*



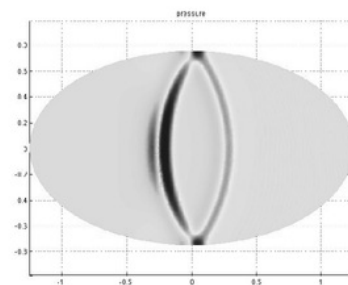
a. Tekanan saat  $t = 0,005268$



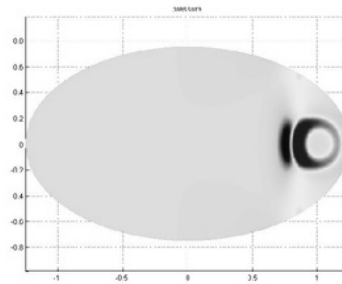
b. Tekanan saat  $t = 0,10536$



c. Tekanan saat  $t = 0,21072$



d. Tekanan saat  $t = 0,63216$



e. Tekanan saat  $t = 1,15896$

Gambar 7. Tekanan saat  $t$

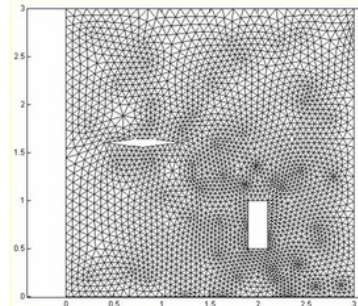
### c. Difraksi Gelombang Akustik

Pada bagian ini domain yang digunakan berbentuk kotak dengan ukuran  $3 \times 3$ , di dalamnya terdapat 2 buah penghalang berbentuk tumpul dan runcing. Jumlah elemen yang digunakan adalah =5504 elemen dengan orde basis=6. Syarat awal untuk kecepatan adalah nol dan untuk tekanan adalah fungsi Gaussian dengan pusat terletak pada koordinat (2, 1,6) :

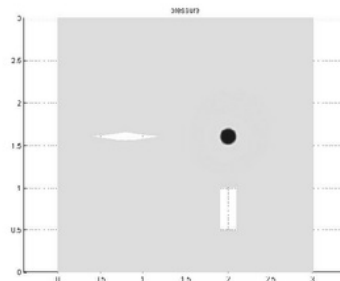


$$p(x, y, 0) = e^{-300((x-2)^2 + (y-1,6)^2)} \quad (14)$$

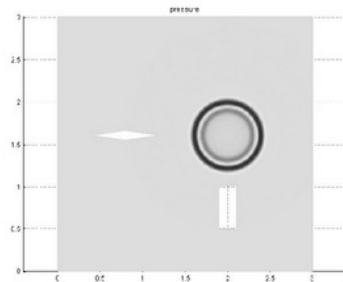
Gelombang jika menabrak penghalang yang mempunyai ukuran lebih besar dari panjang gelombangnya akan dipantulkan dan pada ujung penghalang tersebut terjadi difraksi gelombang, sedangkan jika penghalang berukuran lebih kecil dari panjang gelombang maka penghalang tersebut akan dilewati (gambar 9c – 9d).



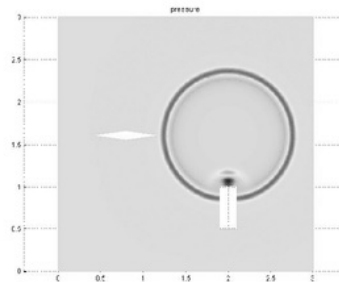
Gambar 8. Mesh dengan 2 penghalang



a. Tekanan saat t= 0,001146



b. Tekanan saat t= 0,045824

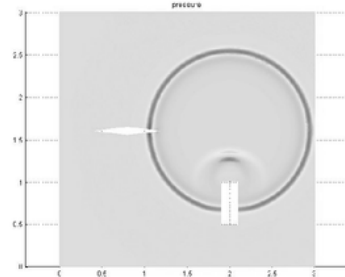


c. Tekanan saat t= 0,091648

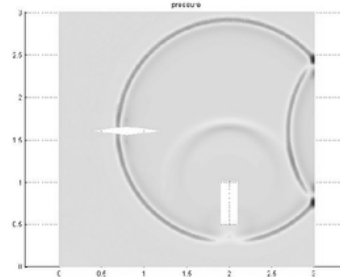
Gambar 9. Tekanan saat t

2

*Studi Gelombang Akustik dengan Metode Discontinuous Galerkin Orde Tinggi dalam Mesh Tidak Berstruktur*  
(Pranowo)



d. Tekanan saat  $t = 0,11456$



e. Tekanan saat  $t = 0,160384$

Gambar 9 (lanjutan). Tekanan saat  $t$

#### 4. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat ditarik dari paper ini adalah:

- Metode *Discontinuous Galerkin* dapat dipakai untuk domain yang berbentuk kompleks.
- Akurasi metode *Discontinuous Galerkin* adalah eksponensial
- Fenomena perambatan gelombang akustik seperti pantulan dan difraksi dapat dimodelkan dengan baik.

8

#### 5. Ucapan Terima Kasih

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada Profesor Jan Hesthaven dari Brown University dan Dr. Tim Warburton dari Rice University atas bantuan berupa pemberian paper-paper mereka dan *software* USEME versi Matlab.

#### Daftar Pustaka

- Carpenter M. H. and Kennedy C. A., 1994, *Fourth-order 2N-Storage Runge-Kutta Schemes*, NASA Technical Memorandum 109112, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia.
- Hesthaven, J. S. and Warburton, T., 2002, *High-order Nodal Methods on Unstructured Grids, I. Time Domain Solution of Maxwell's Equations*, J. Computational Physics, 181, pp. 1-34.
- Hesthaven, J. S. and Warburton, T., 2004, *High-order Nodal Discontinuous Galerkin Methods for Maxwell Eigen Value Problem*, Philosophical Transactions of The Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 362 (1816): 493-524.
- Hirsch, C., 1988, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. I*, John Wiley and Son Publisher, Chicester.
- Pranowo, 2002, Metode Multiresolusi di Kawasan Waktu untuk Penyelesaian Numerik Persamaan Maxwell dan Akustik, Tesis Magister, Universitas Gadjah Mada.
- Pranowo dan Soesianto, F., 2004, *Adaptive Multiresolution Scheme Based on Haar Wavelets for Acoustic Wave Propagation*, Proceeding of International Conference of Quality in Research (QIR), Indonesia University.

- 3  
Schneider, J. B. and Ramahi, O. M., 1998, *The Complementary Operators Method Applied to Acoustic Finite-Difference Time-Domain Simulations*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 104, no. 2, pt. 1, pp. 686-693.
- 1  
Warburton, T., 2003, *Numerical Differential Equation : Discontinuous Galerkin Method*, Lecture notes, University of New Mexico.

ORIGINALITY REPORT

---

**23%**

SIMILARITY INDEX

**14%**

INTERNET SOURCES

**9%**

PUBLICATIONS

**17%**

STUDENT PAPERS

---

PRIMARY SOURCES

---

**1** Submitted to Universitas Atma Jaya Yogyakarta **13%**  
Student Paper

---

**2** [fti.uajy.ac.id](http://fti.uajy.ac.id) **4%**  
Internet Source

---

**3** [www.eecs.wsu.edu](http://www.eecs.wsu.edu) **2%**  
Internet Source

---

**4** [repository.unpar.ac.id](http://repository.unpar.ac.id) **1%**  
Internet Source

---

**5** [www.mfo.de](http://www.mfo.de) **1%**  
Internet Source

---

**6** [orca.cf.ac.uk](http://orca.cf.ac.uk) **1%**  
Internet Source

---

**7** [www.repository.ugm.ac.id](http://www.repository.ugm.ac.id) **1%**  
Internet Source

---

**8** [jurnal.uisu.ac.id](http://jurnal.uisu.ac.id) **1%**  
Internet Source

---

---

Exclude quotes      On

Exclude bibliography      On

Exclude matches      < 1%

FINAL GRADE

**/0**

GENERAL COMMENTS

**Instructor**

---

PAGE 1

---

PAGE 2

---

PAGE 3

---

PAGE 4

---

PAGE 5

---

PAGE 6

---

PAGE 7

---

PAGE 8

---

PAGE 9

---

PAGE 10

---