

# CCP\_32

*by* Pranowo Pranowo

---

**Submission date:** 01-Aug-2019 01:28PM (UTC+0700)

**Submission ID:** 1156711118

**File name:** DENGAN\_METODE\_DISCONTINUOUS\_GALERKINPaper\_I\_Thermofluid\_2010.doc (364.5K)

**Word count:** 1505

**Character count:** 9464

## PEMODELAN NUMERIK WATER HAMMER UNTUK ALIRAN 2 FASE DENGAN METODE DISCONTINUOUS GALERKIN

PRANOWO<sup>1</sup> & A. GATOT BINTORO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Senior Lecturer of Informatics Engineering, Atma Jaya University, Yogyakarta, Indonesia.  
(Email: pran@mail.uajy.ac.id)

<sup>2</sup> Lecturer of Industrial Engineering Atma Jaya University, Yogyakarta, Indonesia

### Abstrak

Paper ini membahas usulan metode numerik Discontinuous Galerkin untuk penyelesaian model peristiwa *water hammer* 2 fase. Model matematika yang digunakan meliputi aliran dalam pipa 1-dimensi dengan 2 fase fluida, yaitu: cair dan gas, fraksi gas relatif sangat kecil dibanding fraksi cairan. Diskretisasi persamaan model menggunakan metode Discontinuous Galerkin (DG). Fungsi basis, yaitu: *trial* dan *test function*, yang digunakan adalah fungsi polinomial Jacobi. Fungsi basis pada setiap elemen tidak kontinu, tetapi konservasi fluks antar elemen tetap terjaga seimbang. Persamaan aljabar yang terbentuk diselesaikan secara eksplisit menggunakan metode Runge Kutta orde-4. Hasil perhitungan dibandingkan dengan hasil perhitungan metode Finite Volume dan data eksperimen, hasilnya menunjukkan kesesuaian yang bagus. Dengan demikian metode Discontinuous Galerkin dapat dengan baik dipakai untuk simulasi peristiwa *water hammer*.

### Kata Kunci

Runge-Kutta, Discontinuous Galerkin, water hammer.

### 1.PENDAHULUAN

Kerusakan yang terjadi pada sistem perpipaan terutama disebabkan oleh perubahan tekanan dalam pipa yang tajam dan dalam waktu singkat akibat penutupan dan pembukaan katup. Fenomena ini disebut efek palu air (*water hammer*) dan kalau sering terjadi maka pipa dapat retak dan pecah. Oleh sebab itu fenomena ini perlu dipelajari lebih rinci, sehingga perubahan tekanan maksimum dan minimum dapat dapat diketahui dan efek kerusakan dapat dikurangi

Salah satu cara untuk mempelajari fenomena water hammer adalah dengan pemodelan

matematika. Model matematika ini kemudian dapat dicari jawabannya secara analitik maupun numerik. Jawaban analitik untuk aplikasi yang kompleks sukar dicari, sehingga metode numerik dipakai untuk mengatasi kesukaran tersebut. Pada umumnya model matematika yang dipakai adalah model untuk aliran fluida dengan fase tunggal (cairan) (Zaruba, 1993; Acuna, 2005), tetapi dengan adanya fraksi gas yang terjebak dalam aliran maka diperlukan model yang mampu memasukkan pengaruh fraksi gas tersebut.

Persamaan model untuk pemodelan palu air dengan fluida 2 fase terdiri dari berbagai macam jenis persamaan (Legius, H. J. W. M., 1997), seperti: *two fluid model*, *drift flux model*, *single equivalent approximation model* dan lain-lain. Legius membuat pemetaan rinci tentang pemakaian berbagai macam persamaan tersebut serta syarat-syarat penggunaannya (Legius). Persamaan *two fluid model* dan *drift flux model* melibatkan persamaan kekekalan massa, momentum dan energi untuk setiap fase sehingga jumlah persamaannya lebih dari 2 macam. Kedua persamaan tersebut dapat berlaku untuk aliran 2 fase dengan fraksi hampa (*void fraction*) yang relatif tinggi seperti aliran *bubbly* dan *slug*. Sedangkan persamaan *single equivalent approximation model* hanya melibatkan 2 jenis persamaan, yaitu: kekekalan massa dan momentum dan hanya berlaku untuk aliran dengan fraksi gas sangat rendah ( $\ll 1$ ).

Guinot (2001) dan Leon (2007, 2008) menggunakan persamaan *single equivalent approximation model* untuk memodelkan

fenomena palu air 2 fase dalam pipa. Metode numerik yang dipakai adalah diskretisasi volume hingga dengan perhitungan fluks Godunov. Perbandingan metode numerik lainnya dan dengan eksperimen menunjukkan kesesuaian yang baik. Metode volume hingga dengan orde akurasi lebih dari dua mengalami kesulitan untuk dikembangkan. Oleh karena itu, metode dengan akurasi yang lebih tinggi perlu dikembangkan.

Paper ini membahas usulan metode numerik Discontinuous Galerkin untuk penyelesaian model peristiwa *water hammer* 2 fase, yaitu persamaan: *single equivalent approximation model* dengan integrasi waktu metode Runge-Kutta eksplisit orde-4.

## II. PERSAMAAN MODEL

Persamaan model yang mendeskripsikan aliran fluida 2 fase dalam saluran tertutup dapat disederhanakan jika fraksi gas dalam aliran tersebut rendah. Gerakan relatif antara cairan dan gas dapat diabaikan (gas dan cairan mempunyai kecepatan sama), dengan demikian cairan dan gas dapat diperlakukan sebagai fluida 1 fase dengan properti rata-rata (*single equivalent fluid*). Persamaan model itu kemudian disebut *single equivalent approximation model* dan ditulis seperti berikut:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ (S_0 - S_f) \rho g \end{bmatrix}$$

$\rho$  adalah densitas,  $u$  adalah kecepatan fluida,  $p$  adalah tekanan,  $g$  adalah percepatan gravitasi,  $f$  adalah faktor gesek Darcy-Weisbach,  $d$  adalah diameter saluran pipa,  $S_0$  adalah kemiringan saluran dan  $S_f$  adalah kemiringan garis energi.

Persamaan di atas berlaku untuk penampang pipa konstan. Penyelesaian persamaan di atas

memerlukan relasi antara variabel tekanan  $p$  dan densitas  $\rho$ , untuk itu diperkenalkan variabel kecepatan kecepatan gelombang tekanan seperti berikut:

$$a_m = \frac{a}{\sqrt{1 + \psi_{ref} \rho_{ref} a^2 \frac{p^{\frac{1}{1+\beta}}}{p^{\frac{1}{\beta}}}}} \quad (2)$$

$$\rho = \rho_{ref} + \frac{1}{a^2} \left( p - p_{ref} + \left( p_{ref}^{\frac{1}{\beta}} - p^{\frac{1}{\beta}} \right) \beta \psi_{ref} \rho_{ref} a^2 p_{ref}^{\frac{1}{\beta}} \right)$$

- $a_m$  : kecepatan campuran cairan dan gas
- $a$  : kecepatan campuran cairan
- $\beta$  : konstanta proses
- $p_{ref}$  : tekanan referensi (101325 Pa)
- $\rho_{ref}$  : densitas referensi (1000 kg/m<sup>3</sup>)

$$p = p_{ref} + a^2 [\rho - \rho_{ref}] \quad (3)$$

## III. DISKRETISASI

Persamaan adveksi linear dipakai sebagai wakil Persamaan (1) untuk penjelasan diskretisasi dengan metode Discontinuous Galerkin 1-dimensi, :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in [L, R] = \Omega \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

Variabel  $f(u) = au$  adalah fluks linier dengan  $a$  adalah suatu konstanta. Domain  $\Omega$  yang berupa ruas garis dibagi menjadi sejumlah  $K$  elemen yang tidak tumpang-tindih (overlap),  $x \in [x_i^k, x_{i+1}^k] = D^k$ , seperti pada Gambar 1. Variabel  $u$  diekspansikan dengan polinomial Legendre orde  $N = N_p - 1$  pada setiap elemen

$D^k$  menjadi  $u_h^k(x, t)$  dan  $N_p$  adalah jumlah nodal pada setiap elemen.

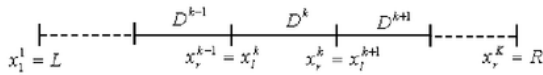
$$u_h^k(x, t) = \sum_{n=1}^{N_p} \hat{u}_n^k(x, t) \psi_n(x) \quad (5)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_p} u_i^k(x, t) l_i^k(x), \quad x \in D^k$$

Dengan menghilangkan superskrip  $k$  persamaan (5) dapat ditulis menjadi:

$$u_h^k = \Psi^T \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{L}^T \mathbf{u} \quad (6)$$

$\hat{u}_n^k$  adalah aproksimasi ekspansi modal dan  $u_i^k$  aproksimasi ekspansi nodal untuk  $u$  pada elemen  $D^k$ ,  $\psi_n(x)$  adalah basis polinomial Legendre dan  $l_i^k(x)$  adalah polinomial Lagrange dengan nodal Gauss-Lobatto-Legendre (GLL).



Gambar 1. Domain 1-dimensi

Solusi global  $u(x, t)$  didekati secara numeris penjumlahan seluruh solusi lokal :

$$u(x, t) \approx u_h(x, t) = \bigoplus_{k=1}^K u_h^k(x, t) \quad (7)$$

Pendekatan numeris persamaan (4) dilakukan dengan menggunakan metode Discontinuous Galerkin (Hesthaven, J. S. and Warburton, T., 2008) untuk setiap elemen, untuk hal tersebut maka persamaan (4.1) dikalikan dengan fungsi bobot kemudian diintegrasikan secara parsial. Fungsi bobot dipilih sama dengan *trial function*. Hasil integrasi parsial sebanyak 2 kali adalah:

$$\left( l_n, \frac{\partial u_h^k}{\partial t} \right)_{D^k} + \left( l_n, a \frac{\partial u_h^k}{\partial x} \right)_{D^k} = \left( l_n, n \cdot (a u_h^k - a u^*) \right)_{kD^k} \quad (8)$$

( $\cdot, \cdot$ ) merupakan operator perkalian dalam, sebagai contoh:  $(u, v)_{\Omega} = \int u v d\Omega$  dan  $\mathbf{n}$  adalah vektor normal terhadap batas elemen (bernilai - (minus) pada batas elemen sebelah kiri dan + (plus) pada batas elemen sebelah kanan. Suku kanan persamaan (8) adalah suku fluks. Perhitungan suku fluks mengadopsi perhitungan fluks pada metode Finite Volume yang telah berkembang dengan baik. Pada paper ini, fluks yang digunakan adalah fluks Lax-Friedrich.

Dengan menggunakan *weight* dan *trial function* berupa fungsi interpolasi Lagrange, maka persamaan (4.11b) menjadi:

$$\sum_{n=1}^{N_p} \sum_{m=1}^{N_p} (l_n, l_m)_{D^k} \frac{du_m^k}{dt} + a \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{m=1}^{N_p} \left( l_n, \frac{\partial l_m}{\partial x} \right) u_m^k \quad (9)$$

$$= \sum_{n=1}^{N_p} \left[ l_n, a (u_h^k - u^*) \right]_{x_i^k} dx$$

Persamaan semi diskret (9) diintegrasikan menurut waktu menggunakan metode low-storage explicit Runge-Kutta (LSERK) orde-4 (Carpenter dan Kennedy, 1994). Perhitungan ini mempunyai 5 tingkat perhitungan dengan akurasi berorde-4, metode ini hanya memerlukan 2 tingkat penyimpanan data.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{S} = L[t, \mathbf{U}(x, t)] \quad (10)$$

Tahap perhitungan persamaan di atas menggunakan Runge-Kutta di atas adalah:

$$d\mathbf{U}_j = A_j d\mathbf{U}_{j-1} + hL(\mathbf{U}_j) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_{j-1} + B_j + d\mathbf{U}_j$$

$A_j$  dan  $B_j$  : koefisien Runge-Kutta

#### IV. HASIL PERHITUNGAN

Perhitungan numeris dilakukan dengan mengambil 2 contoh kasus. Kasus pertama diambil dari perhitungan metode Finite Volume oleh Leon dkk (2008). Parameter pipa, fluida 2-phase dan parameter numerik diperlihatkan pada Tabel 1

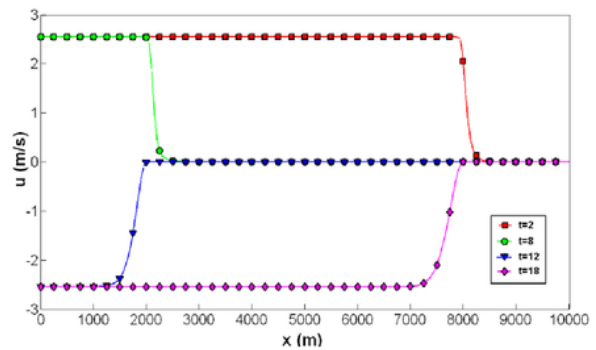
Tabel 1. Parameter pipa, fluida 2-phase dan parameter numerik contoh perhitungan ke-3

Parameter	Symbol and unit	Value
Pipe length	$L$ (m)	10000
Nominal cross-sectional area	$A_0$ (m <sup>2</sup> )	0.785
Nominal celerity	$c_0$ (m.s <sup>-1</sup> )	1000.0
Nominal head	$h_0$ (m)	200
Steady-state discharge	$Q$ (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )	2.0
Friction Coefficient	$f$ (-)	0
Element Length	$\Delta x$ (m)	50
Time step	$\Delta t$ (s)	0.005
Polynomial Order	$N$	1

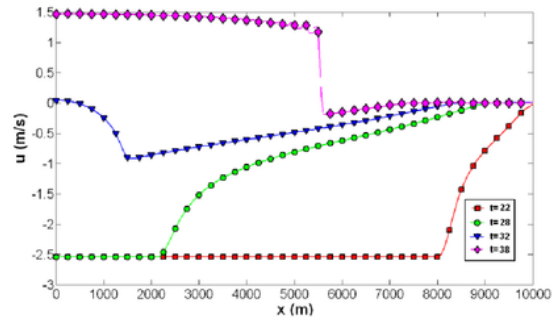
Syarat batas kecepatan di katup masukan adalah berupa syarat batas Neumann ( $\partial u / \partial x = 0$ ), sedangkan di katup keluaran syarat batasnya berupa syarat batas Dirichet ( $u = 0$ ). Sedangkan syarat batas tekanan di katup masukan adalah syarat batas Dirichlet ( $p = 1.961e6$ ), sedangkan di katup keluaran syarat batasnya berupa syarat batas Neumann ( $\partial p / \partial x = 0$ ).

Pada awalnya fluida mengalir dalam pipa horizontal tanpa gesekan dengan kecepatan tetap 2.55 m/s, kemudian secara tiba-tiba katup keluaran (sebelah kanan pipa) ditutup. Saat katup keluaran ditutup maka kecepatan fluida menjadi nol (Gambar 2a) tekanan meningkat tajam (Gambar 3a) sehingga terjadi gelombang kejut yang merambat ke kiri. Gelombang ini akan dipantulkan kembali oleh katup masukan dan merambat kembali ke kanan. Sesampainya di katup keluaran gelombang ini akan dipantulkan lagi ke kiri dan diteruskan lagi dengan pantulan ke kanan dan ke kiri demikian

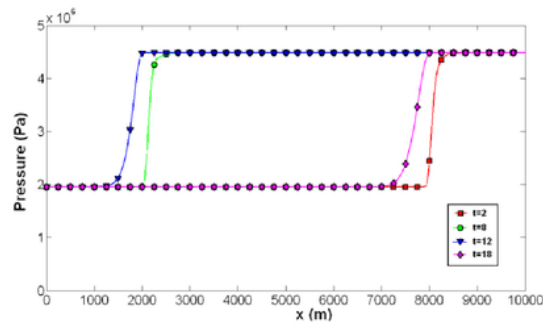
seterusnya. Dengan demikian tekanan dengan gradien yang tajam akan dipantulkan bolak-balik, sehingga kondisi ini berbahaya bagi struktur pipa karena menerima beban kejut yang periodis. Simulasi peristiwa palu air ini dapat dilihat pada Gambar 2a-2b (distribusi kecepatan) dan Gambar 3a-3b (distribusi tekanan).



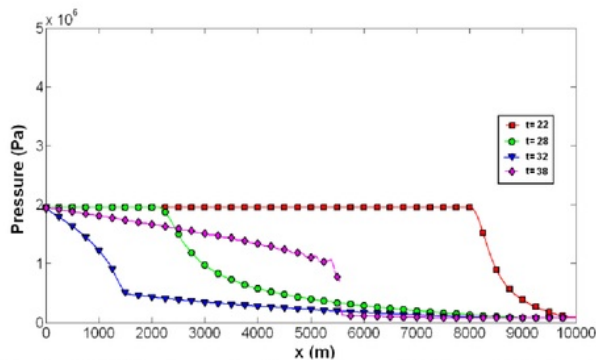
Gambar2a. Distribusi kecepatan fluida untuk berbagai waktu untuk contoh ketiga



Gambar 2b. Lanjutan distribusi kecepatan fluida untuk berbagai waktu untuk contoh ketiga

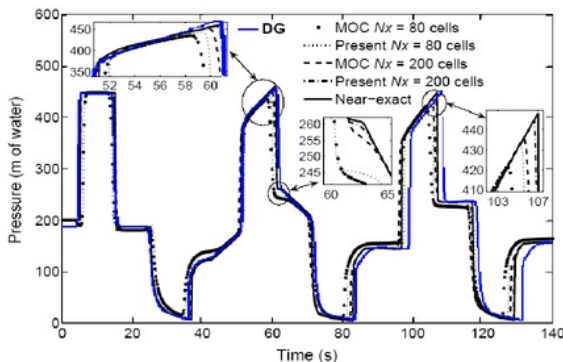


Gambar 3a. Distribusi tekanan fluida untuk berbagai waktu untuk contoh ketiga



Gambar 3.9b. Lanjutan distribusi tekanan fluida untuk berbagai waktu untuk contoh ketiga

Perbandingan hasil perhitungan metode DG dengan metode karakteristik (MOC) dan Finite Volume (Leon dkk., 2008) menunjukkan kesesuaian yang baik (Gambar 4).



Gambar 4. Perbandingan hasil perhitungan untuk tekanan di tengah pipa untuk contoh ketiga

## V. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat ditarik dari dari paper ini adalah:

1. Peristiwa palu air (water hammer) untuk fluida 1 dan 2-fase dapat disimulasikan dengan baik.
2. Perbandingan hasil perhitungan metode Discontinuous Galerkin dengan metode karakteristik dan Finite Volume menunjukkan kesesuaian yang bagus.

## Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Atma Jaya Yogyakarta atas dukungan dana penelitian ini.

## REFERENSI

- Acuña, J. S., 2005, *Generalized Water Hammer Algorithm For Piping Systems With Unsteady Friction*, M.Sc. Thesis, The University Of Puerto Rico.
- Carpenter M. H. and Kennedy C. A., 1994, *Fourth-order 2N-Storage Runge-Kutta Schemes*, NASA Technical Memorandum 109112, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia.
- Guinot, V., 2001, *Numerical simulation of two-phase flow in pipes using Godunov method*, Int. J. Numer. Meth. Engng 2001, 50, pp.1169-1189.
- Hesthaven, J. S. and Warburton, T., 2008, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*, Springer, New York.
- Legius, H. J. W. M., 1997, *Pulsation and Wave Propagation in Two-Phase Pipe Systems*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Netherlands.
- Leon, A. S., 2007, *Improved Modeling of Unsteady Free Surface, Pressurized and Mixed Flows in Storm-sewer Systems*, Ph.D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA.
- Leon, A. S. dkk., 2008, *An Efficient Second-Order Accurate Shock-Capturing Scheme For Modeling One and Two-Phase Water Hammer Flows*, Journal of Hydraulic Engineering, 134(7), pp. 970-983.
- Zaruba, J., 1993, *Water Hammer in Pipe - Line Systems*, Elsevier, Amsterdam.
- Zhao, M., 2004, *Unsteady Pipe Friction: Formulation of Efficient Models and Investigation of Existing Modeling Assumptions*, Ph.D. Thesis, The Hong Kong University of Science and Technology.

ORIGINALITY REPORT

---

**20%**

SIMILARITY INDEX

**17%**

INTERNET SOURCES

**12%**

PUBLICATIONS

**12%**

STUDENT PAPERS

---

MATCH ALL SOURCES (ONLY SELECTED SOURCE PRINTED)

---

5%

★ Submitted to Universitas Atma Jaya Yogyakarta

Student Paper

---

Exclude quotes Off

Exclude matches Off

Exclude bibliography Off

FINAL GRADE

**/0**

GENERAL COMMENTS

**Instructor**

---

PAGE 1

---

PAGE 2

---

PAGE 3

---

PAGE 4

---

PAGE 5

---