

C7_09_Senendo_2014

by Pranowo Pranowo

Submission date: 06-Jan-2018 05:03PM (UTC+0700)

Submission ID: 900576095

File name: C7_09_Senendo_2014.pdf (21.27M)

Word count: 1955

Character count: 11233

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN AIR DANGKAL LINEAR DENGAN METODE RADIAL BASIS FUNCTION IMPLISIT

Pranowo

Teknik Informatika, Universitas Atma Jaya Yogyakarta
Email : pran@mail.uajy.ac.id

ABSTRAK

Paper ini membahas penjabaran solusi numerik Persamaan Air Dangkal linear dengan metode Meshless Radial Basis Function (RBF) untuk diskritisasi ruang dan metode Euler Implisit untuk integrasi waktu. Metode RBF bersifat fleksibel dan sederhana karena tidak memerlukan pembuatan mesh, perhitungan cukup menggunakan titik-titik nodal yang disebar dalam domain ruang. Supaya perhitungan robust (stabil) untuk lebar langkah waktu (Δt) yang besar maka digunakan integrasi waktu Euler implisit. Metode ini memerlukan penyelesaian matriks yang berukuran relatif besar, sehingga beban komputasinya relatif besar. Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode RBF dapat digunakan untuk simulasi aliran air dangkal.

Keywords : Radial Basis Function, Persamaan Air Dangkal, linear.

1. PENDAHULUAN

¹² Indonesia sebagai negara kepulauan mempunyai potensi sumber daya kelautan yang melimpah. Salah satu potensi yang belum tergarap dengan baik adalah pemanfaatan arus laut sebagai sumber energi non fosil. Penelitian tentang karakter arus laut di Indonesia perlu dikembangkan supaya pemahaman fenomena arus laut dapat dimanfaatkan sebagai alternatif sumber daya energi.

Usaha usaha penelitian tentang arus laut di Indonesia sebenarnya sudah dimulai dirintis, cuma jumlahnya masih sedikit. Erwandi (2010) mengatakan bahwa sejak tahun 2006, pihak UPT BPPH BPPT melakukan pemetaan potensi energi arus laut di Indonesia dengan menggunakan pemodelan numerik. Berdasar hasil simulasi dibuat kajian tentang rancang bangun turbin pembangkit listrik bertenaga arus laut. Prototipe alat tersebut berhasil dibuat dan dipasang di Larantuka, NTT. Yuningsih dan Masduki (2011) melakukan penelitian morfologi dasar laut dan sifat hidro-oseanografi pesisir Flores Timur, hasilnya berupa data perkiraan energi kinetik arus laut yang dapat diubah menjadi energi listrik.

¹⁵ Simulasi numerik arus laut pada penelitian di atas menggunakan MEC (*Marine Environmental Environmental Committee*) *ocean Model* yang dikembangkan oleh Marine Environmental Committee – The Society of Naval of Japan. Metode numerik yang digunakan adalah metode Finite difference, di mana domain ruang dibagi menjadi sejumlah grid kotak-kotak, Pembagian dengan grid kotak ini tidak cocok dengan problem sesungguhnya karena domain yang berupa laut dibatasi daratan dengan bentuk yang tidak teratur. Berdasar alasan tersebut maka perlu diusulkan suatu metode numerik yang bisa dipakai untuk domain ruang yang berbentuk rumit. Paper ini mengusulkan penggunaan metode Meshless Radial Basis Function (RBF) untuk penyelesaian persamaan Air Dangkal Linear (*linear shallow water equations*).

2. KAJIAN PUSTAKA

Persamaan Model

Persamaan model matematika yang digunakan untuk pemodelan arus laut adalah persamaan Air Dangkal (Shallow Water Equations). Persamaan ini merupakan turunan dari Persamaan Navier Stokes dengan menganggap bahwa rasio kedalaman laut dibanding luas

laut adalah sangat kecil sehingga variabel kecepatan yang berarah vertikal bisa diabaikan dan tekanan yang terjadi adalah tekan hidrostatis, selain itu efek viskositas fluid juga diabaikan. Kebanyakan persamaan ini diselesaikan secara numerik dengan metode finite difference (Randall, 1994; Rivlet & Neves, 2010) tetapi karena metode ini tidak bisa menanggapi batas daratan yang rumit, beberapa peneliti mengusulkan metode Discontinuous Galerkin (Eskilsson & Sherwin, 2004; Dawson dkk, 2013; Wirasat dkk, 2014). Metode ini menggunakan mesh segitiga sehingga dapat dipakai untuk domain yang rumit selain itu akurasinya tinggi. Meskipun metode Discontinuous Galerkin mempunyai fleksibilitas tinggi dalam menangani bentuk domain yang rumit tetapi pembuatan mesh dan perhitungan numeriknya relatif sukar. Beberapa peneliti (Hon dkk, 1999; Wong, Hon and Goldberg, 2002; Flyerand Wright, 2009) mengusulkan metode Meshless Radial Basis Function (RBF), metode ini tidak memerlukan mesh. Perhitungan numerik berdasarkan titik-titik nodal yang boleh ditempatkan secara sembarang dalam domain ruang. Metode ini sangat fleksibel dan berakurasi tinggi. Metode integrasi waktu yang digunakan dalam penelitian di atas menggunakan metode eksplisit, metode ini sederhana tetapi bersifat stabil bersyarat, CFL number tidak boleh melebihi angka 1. Sehingga penentuan lebar langkah waktu tidak boleh sembarang dan dibatasi bernilai kecil untuk menjaga kestabilan perhitungan numerik. Untuk mengatasi hal tersebut paper ini mengusulkan metode Euler implisit untuk integrasi waktu, metode ini stabil tanpa syarat tetapi melibatkan penyelesaian matriks berukuran relatif besar. Solver yang dikembangkan dipakai untuk menyelesaikan Persamaan Air Dangkal linear sebagai uji coba. Persamaan Air Dangkal ini sah jika kecepatan air laut atau gangguan tekanan yang terjadi adalah relatif kecil, persamaan ini ditulis seperti berikut (Wong, Hon and Goldberg, 2002):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

adalah ketinggian permukaan air laut, H adalah ketinggian total air laut dan g adalah percepatan gravitasi.

Metode Radial Basis Function

Metode Radial Basis Function sebenarnya adalah metode interpolasi yang berdasar nilai jarak radius antar titik di dalam domain. Variabel u diambil sebagai contoh perhitungan seperti berikut:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_{u_j} \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^c\|_2) \quad (4)$$

\mathbf{x}_j^c adalah posisi titik-titik nodal, N adalah jumlah titik nodal, α adalah koefisien interpolasi yang dicari dan $\phi(r)$ adalah fungsi interpolasi radial basis. Fungsi ϕ dalam paper ini menggunakan fungsi multiquadratic (MQ) yang berbentuk:

$$\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^c\|_2, \varepsilon) = \phi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 r^2} \quad (5)$$

$$r = \|\mathbf{x}_j^c\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$$

Konstanta ε adalah shape factor. Persamaan (4) dapat ditulis dalam bentuk matriks seperti berikut:

$$\mathbf{B}\mathbf{a}_u = \mathbf{u} \quad (6)$$

Matriks \mathbf{B} berukuran $N \times N$ dan elemennya berisi: $b_{ij} = \phi(\|\mathbf{x}_i^c - \mathbf{x}_j^c\|_2)$, $i, j = 1, \dots, N$

Variabel yang lain dapat diinterpolasi menggunakan cara di atas

$$\mathbf{B}\mathbf{a}_v = \mathbf{v} \ \& \ \mathbf{B}\mathbf{a}_\zeta = \zeta$$

Turunan ruang dapat dihitung dengan cara :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \mathbf{H}_x \mathbf{a}_\zeta \quad ; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \mathbf{H}_y \mathbf{a}_\zeta \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{H}_x \mathbf{a}_u \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathbf{H}_y \mathbf{a}_v$$

Matriks \mathbf{H}_x mempunyai elemen: $h_{xij} = \frac{\partial}{\partial x} \phi(\|\mathbf{x}_i^c - \mathbf{x}_j^c\|_2)$, $i, j = 1, \dots, N$ sedangkan elemen \mathbf{H}_y

mempunyai elemen: $h_{yij} = \frac{\partial}{\partial y} \phi(\|\mathbf{x}_i^c - \mathbf{x}_j^c\|_2)$, $i, j = 1, \dots, N$

Diskretisasi Persamaan (1) - (3) menggunakan dan Radial Basis Function dan integrasi waktu Euler implisit adalah seperti berikut:

$$\mathbf{B}\mathbf{a}_\zeta^{n+1} + \Delta t H (\mathbf{H}_x \mathbf{a}_u^{n+1} + \mathbf{H}_y \mathbf{a}_v^{n+1}) = \zeta^n$$

$$\mathbf{B}\mathbf{a}_u^{n+1} + \Delta t \mathbf{H}_x \mathbf{a}_\zeta^{n+1} = \mathbf{u}^n \quad (7)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{a}_v^{n+1} + \Delta t \mathbf{H}_y \mathbf{a}_\zeta^{n+1} = \mathbf{v}^n$$

Superscript n menyatakan level waktu sekarang sedangkan $n+1$ menyatakan level yang akan datang. Persamaan (7) dapat ditulis dalam bentuk yang ringkas menjadi :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \Delta t H \mathbf{H}_x & \Delta t H \mathbf{H}_y \\ g \mathbf{H}_x & \mathbf{B} & 0 \\ g \mathbf{H}_y & 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\zeta^{n+1} \\ \mathbf{a}_u^{n+1} \\ \mathbf{a}_v^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\zeta^n \\ \mathbf{a}_u^n \\ \mathbf{a}_v^n \end{bmatrix} \quad (8)$$

Matriks pada persamaan (8) berukuran $3N \times 3N$ dan diselesaikan untuk setiap langkah waktu dengan syarat batas:

$$u_{batas} = (\tilde{u} n_y - \tilde{v} n_x) n_y; \ v_{batas} = (-\tilde{u} n_y - \tilde{v} n_x) n_x; \ \zeta_{batas} = \tilde{\zeta} \quad (9)$$

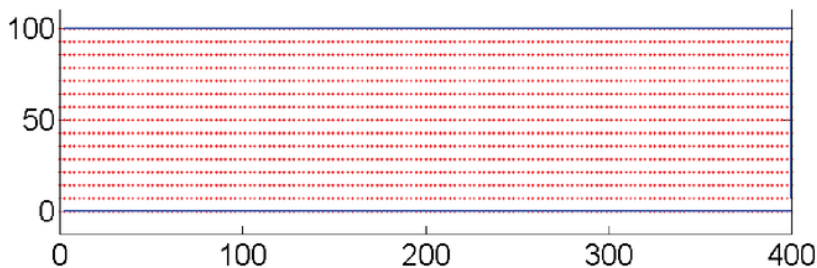
(n_x, n_y) adalah vektor normal pada batas domain. Variabel $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\zeta})$ adalah hasil perhitungan nilai (u, v, ζ) pada batas

Adapun algoritma perhitungan numerik adalah seperti berikut:

1. Tentukan posisi titik-titik nodal dalam domain, syarat batas, syarat awal.
2. Inisialisasi nilai (u, v, ζ) , tentukan Δt dan matriks $\mathbf{B}, \mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y$.
3. Perhitungan langkah waktu dimulai:
 - Selesaikan persamaan (8)
 - Hitung syarat batas (persamaan 9)
4. Jika $(t > t_{\max})$ loncat ke langkah 5 jika tidak ulangi langkah 3.
5. Tulis data.
6. Selesai.

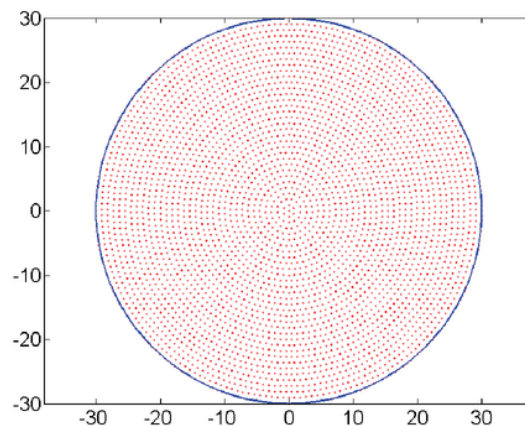
Domain simulasi

Simulasi numerik dilakukan menggunakan 2 contoh perhitungan. Contoh perhitungan pertama adalah aliran arus pada kanal berbentuk kotak dengan panjang 400 m dan lebar 100 m. Semua sisi kecuali sisi kiri menggunakan syarat batas persamaan (9), sedangkan syarat batas sisi kiri menggunakan syarat batas $\zeta(t) = e^{-10(t-1)^2}$. Syarat awal untuk variabel (u, v, ζ) bernilai nol dan kedalaman air adalah 20 m.



Gambar 1. Domain kanal dan distribusi titik - titik nodal

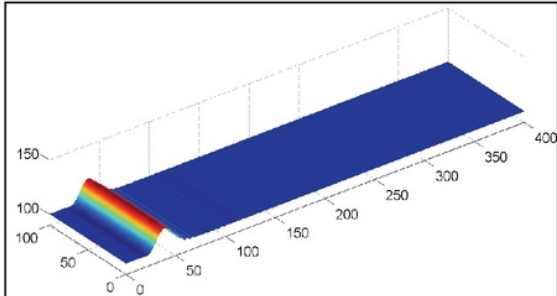
Contoh perhitungan kedua adalah aliran arus akibat gangguan pada permukaan air dengan dalam domain yang berbentuk lingkaran berjari-jari 30 m dan kedalaman air adalah 2 m. Sisi domain menggunakan syarat batas persamaan (9), syarat awal untuk variabel (u, v) bernilai nol dan $\zeta(x, y, 0) = 0.2e^{-0.1((x-10.75)^2 + (y-10.0)^2)}$.



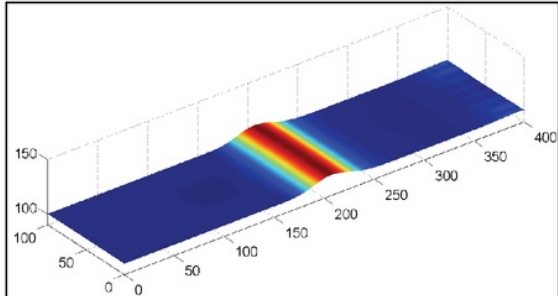
Gambar 2. Domain lingkaran dan distribusi titik - titik nodal

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

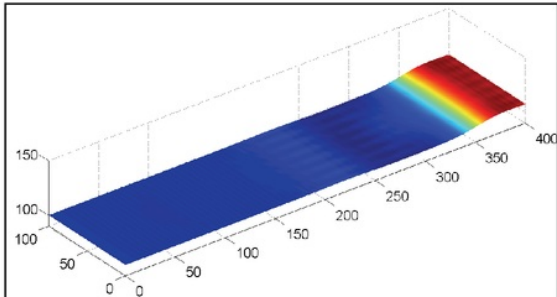
Perhitungan contoh pertama aliran terjadi karena ada eksitasi gelombang yang berupa fungsi waktu gaussian pada sisi kiri. Pada mulanya air dalam keadaan tenang kemudian setelah mendapat usikan dari sebelah sisi kiri gelombang merambat dari arah kiri menuju ke kanan dan setelah sampai sisi sebelah kanan gelombang akan dipantulkan kembali ke kiri (gambar 3a - 3d). Perambatan gelombang air menyerupai fenomena penjalaran gelombang pada tali yang diberi sentakan dari arah kiri dan ujung kanan yang diikat.



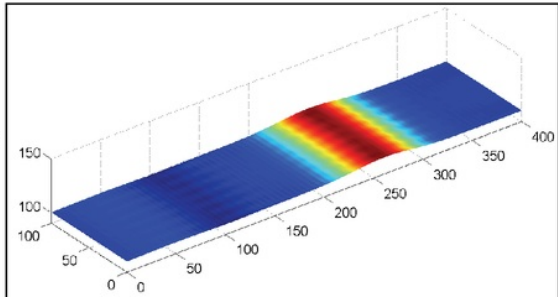
Gambar 3.a. Perambatan gelombang pada kanal saat $t = 4s$



Gambar 3.b. Perambatan gelombang pada kanal saat $t = 16s$

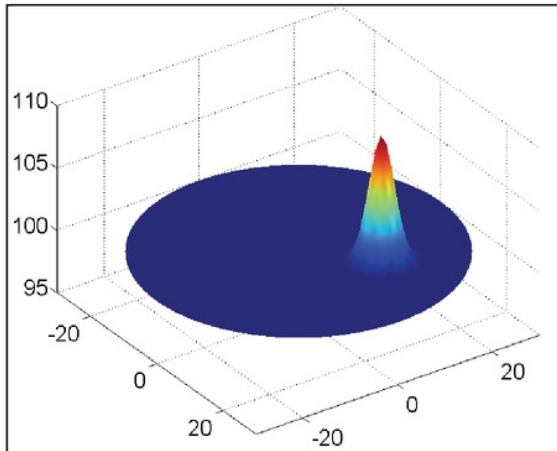


Gambar 3.c. Perambatan gelombang pada kanal saat $t = 28s$

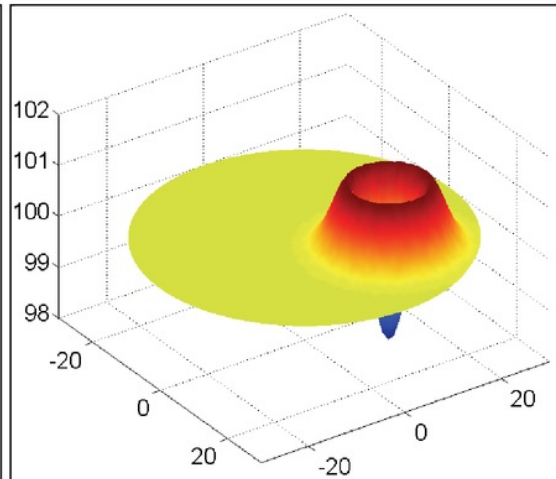


Gambar 3.d. Perambatan gelombang pada kanal saat $t = 40s$

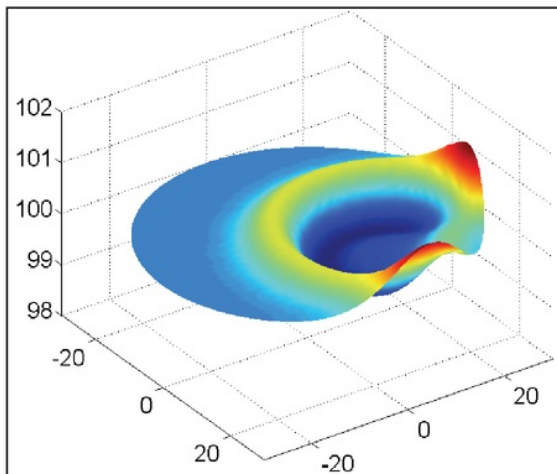
Perhitungan contoh kedua aliran terjadi karena ada gangguan ketinggian permukaan air yang diberikan oleh syarat awal. Gangguan ini akan merambat ke segala arah dan akhirnya menabrak dinding dan dipantulkan kembali, Gambar elevasi pada snapshot digambar dengan pembesaran untuk memperjelas elevasi permukaan air.



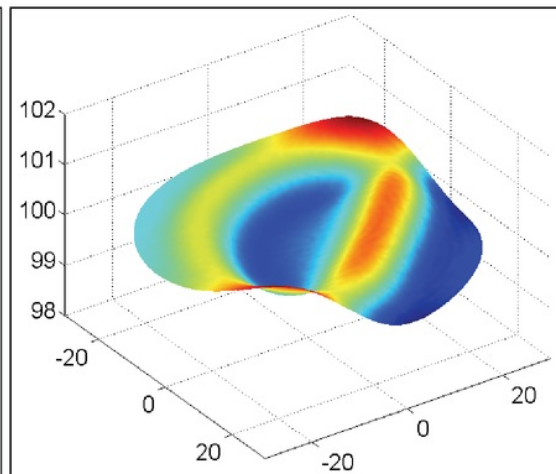
Gambar 4.a. Elevasi permukaan air pada domain lingkaran saat $t = 0$ s



Gambar 4.b. Elevasi permukaan air pada domain lingkaran saat $t = 0.2$ s



Gambar 4.c. Elevasi permukaan air pada domain lingkaran saat $t = 0.6$ s



Gambar 4.d. Elevasi permukaan air pada domain lingkaran saat $t = 1.0$ s

4. KESIMPULAN DAN REKOMENDASI

Hasil perhitungan numerik memperlihatkan bahwa fenomena aliran air dangkal dapat disimulasikan dengan baik dengan metode Meshless Radial Basis Functon. Simulasi numerik juga memperlihatkan pengertian fisis yang tidak bertentangan dengan fenomena fisis yang nyata. Perhitungan tidak mengalami kendala kestabilan, pemilihan Δt leluasa dilakukan.

Penelitian pada paper ini masih merupakan penelitian awal, untuk penelitian selanjutnya integrasi waktu menggunakan metode implisit orde tinggi Time Discontinuous Galerkin (TDG) untuk meningkatkan akurasi dan mengaplikasikan metode tersebut untuk masalah nyata yang melibatkan Persamaan Air Dangkal nonlinear. Selain itu hasil perhitungan numerik inimasih memerlukan validasi dengan data eksperimen ataupun dengan perbandingan dengan hasil perhitungan numerik lainnya, seperti metode Finite Difference atau Finite Element.

5. DAFTAR PUSTAKA

1. Dawson, C., C.J. Trahan, E.J. Kubatko, J.J. Westerink, "A parallel local timestepping Runge-Kutta discontinuous Galerkin method with applications to coastal ocean modeling," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 259, 154-165, 2013.
2. Eskilsson, C. and Sherwin, S. J., "A triangular spectral/hp discontinuous Galerkin method for modelling 2D shallow water equations," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Volume 45, Issue 6, pages 605–623, 2004.
3. Erwandi, "Sumber Energi Arus Laut dari Selat Lantuka Flores Timur," <http://pltal.wordpress.com/>, diakses tanggal 20 April 2014.
4. Flyer, N. and Wright, G. B., "A radial basis function method for the shallow water equations on a sphere," *Proceeding The Royal Society A*, vol. 465 no. 2106 1949-1976, 2009.
5. Hon, Y., Cheung, K., Mao, X., and Kansa, E. "Multiquadric Solution for Shallow Water Equations," *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(5), 524–533, 1999.
6. Randall, D. A., "Geostrophic adjustment and the finite-difference shallow-water equations," *Mon. Wea. Rev.*, 122, 1371-1377, 1994.
7. Riflet, G. and Neves, R., "Developing a shallow-waters finite-differences numerical model to study convectively dominated flows near the boundaries," 2nd International Conference on Engineering Optimization, Lisbon, Portugal, September 6-9, 2010.
8. Wirasaet, D., E.J. Kubatko, C.E. Michoski, S. Tanaka, J.J. Westerink, C. Dawson, "Discontinuous Galerkin Methods with Nodal and Hybrid Modal/Nodal Triangular, Quadrilateral, and Polygonal Elements for Nonlinear Shallow Water Flow," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 270, 113-149, 2014.
9. Wong, S.M., Hon, Y.C. and Golberg, M.A., "Compactly supported radial basis functions for shallow water equations," *Applied Mathematics and Computation*, Volume 127, Issue 1, Pages 79–101, 2002.
10. Yuningsih, A. dan Masduki, A., Potensi Energi Arus Laut untuk Pembangkit Tenaga Listrik di Kawasan Pesisir Flores Timur, NTT," *Jurnal Ilmu dan Teknologi Kelautan Tropis*, Vol. 3, No. 1, Hal. 13-25, Juni 2011.

FINAL GRADE

/0

GENERAL COMMENTS

Instructor

PAGE 1

PAGE 2

PAGE 3

PAGE 4

PAGE 5

PAGE 6

PAGE 7

ORIGINALITY REPORT

15%

SIMILARITY INDEX

14%

INTERNET SOURCES

12%

PUBLICATIONS

8%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	coast.nd.edu Internet Source	2%
2	engineering.nd.edu Internet Source	2%
3	ejournal.undip.ac.id Internet Source	1%
4	publications.lib.chalmers.se Internet Source	1%
5	www6.cityu.edu.hk Internet Source	1%
6	oe.soest.hawaii.edu Internet Source	1%
7	otik.zcu.cz Internet Source	1%
8	www.engr.colostate.edu Internet Source	1%
9	lemac1.dem.ist.utl.pt Internet Source	1%

10

www.bppt.go.id

Internet Source

1%

11

libmesh.sourceforge.net

Internet Source

1%

12

ardyanbaster.blogspot.com

Internet Source

1%

13

holdigaz.ch

Internet Source

<1%

14

Fujiwara, Takamichi. "A Feasibility Study on Generation of Electricity by the Tidal Current in Kanmon Strait", Volume 3 Materials Technology Ocean Engineering Polar and Arctic Sciences and Technology Workshops, 2003.

Publication

<1%

15

Islam, Md. Nazrul, and Daisuke Kitazawa. "Numerical simulation on coastal environment in Kamaishi Bay (Japan) by MEC model", OCEANS 2014 - TAIPEI, 2014.

Publication

<1%

Exclude quotes

Off

Exclude matches

Off

Exclude bibliography

Off