

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA DAN LANDASAN TEORI

#### 3.1. Tinjauan Pustaka

Berdasarkan studi ( Zhou dan Chelidze, 2007) diketahui bahwa algoritma *blind source separation* (BSS) dapat mengidentifikasi bentuk linear normal (LMN) dengan baik. Simulasi numerik dan eksperimental telah dilakukan dengan metode *blind source separation* (BSS). Dua algoritma yang ditinjau yaitu *algorithm for multiple unknown signals extraction* (AMUSE) dan *second blind order identification* (SOBI). AMUSE dibandingkan dengan metode analisis modal domain waktu yaitu *Ibrahim time domain* (ITD). Simulasi numerik getaran sistem 3 DOF dengan redaman dan tanpa redaman pada kondisi bebas *noise* dan di lingkungan *noisy*, sedangkan uji eksperimental menggunakan balok aluminium dimensi  $0,0063 \times 0,05 \times 0,96 \text{ m}^3$  yang di jepit 1 sisi ujung bebas dan dipasang 5 *acclerometer* di sepanjang balok dengan diberikan *impact hammer*.

Studi analisis numerik dan eksperimental parameter modal berdasarkan *output* dengan teknik *blind source separation* (BSS), yaitu *independent component analysis* (ICA) dan *second order blind identification* (SOBI) menunjukkan bahwa metode *second order blind identification* (SOBI) cukup menjanjikan pada area sistem identifikasi (Poncelet, *et al.*, 2007). Simulasi numerik sistem 3 DOF dengan redaman dan sistem tanpa redaman serta eksperimental dengan pisau stator yang diambil dari mesin turbojet untuk mendemonstrasikan kegunaan algoritma *second order blind identification* (SOBI) yang dibandingkan dengan metode *stochastic subspace identification* (SSI) pada

aplikasi nyata di lapangan. Studi lebih lanjut sangat diperlukan untuk analisis struktur yang lebih kompleks.

Studi mendalam tentang analisis modal eksperimental menggunakan teknik *blind source separation* (BSS) dengan simulasi numerik dan eksperimental dilakukan oleh Poncelet (2010) dengan truss satelit, pisau strator mesin pesawat dan struktur 2 lantai. Hasil yang diperoleh dengan algoritma *second order blind identification* (SOBI) menunjukkan akurasi yang menjanjikan dan telah dibuktikan dengan metode yang sudah stabil yaitu *covariance-derived stochastic subspace identification* (SSI-COV).

Studi eksperimental model struktur *frame* 4 lantai untuk struktur normal dan struktur rusak dengan metode *blind source separation* (BSS) telah dilakukan dan semua kerusakan dideteksi akibat adanya penyimpangan parameter modal terestimasi (Spiridonakos, *et al.*, 2014). Struktur *frame* dengan material baja S235, modulus elastisitas 210 GPa, massa jenis 7850 kg/m<sup>3</sup> serta dimensi plat lantai 500 x 470 x 12 (mm), kolom 550 x 45 x 10 (mm), kolom lemah 550 x 34 x 4 (mm), dan pengaku X ukuran 623 x 40 x 6 (mm). Struktur tersebut mempertimbangkan 3 skenario kerusakan yang berbeda, dan parameter modal struktur dibandingkan pada kondisi struktur normal dan kondisi rusak.

Studi pada perilaku dinamik jembatan *truss* selama proses konstruksi dengan metode *second order blind identification* (SOBI) dilakukan oleh Heatland (2015), dan dapat diketahui bahwa semakin lama durasi waktu (*time series*), metode *second order blind identification* (SOBI) menunjukkan peningkatan yang berarti serta diperoleh akurasi estimasi yang jauh berkurang untuk rasio redaman

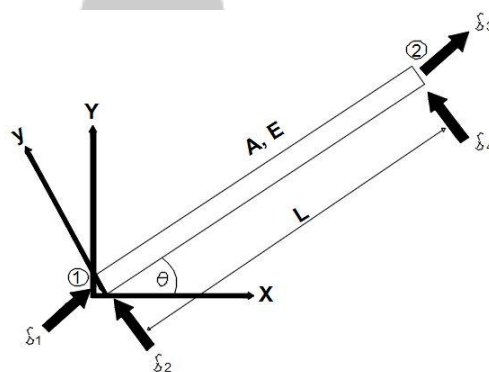
yang lebih besar. Studi tersebut menggunakan teknik analisis operasional modal dengan metode *second order blind identification* (SOBI) yang divalidasi menggunakan analisis *shear frame* dan elemen redaman tak proporsional. Akurasi metode tersebut ditinjau untuk beberapa rasio redaman.

### 3.2. Landasan Teori

#### 3.2.1. Analisis Numerik Struktur Truss Rangka Bidang (*Plane Trusses*)

##### 3.2.1.1. Matriks Kekakuan dan Matriks Massa

Analisis statik struktur truss yang batang-batangnya terhubung dengan sambungan sendi menjadi berkurang terhadap permasalahan penentuan gaya batang karena sekumpulan beban yang dikenai pada join. Jika struktur truss yang sama dikenai gaya dinamik, situasi sederhana seperti hanya tegangan axial yang terjadi pada batang tidak lagi ada. Gaya inersia berkembang disepanjang batang, dan pada umumnya menghasilkan lentur seperti gaya aksial. Momen lentur pada ujung-ujung batang akan tetap bernilai nol karena tidak adanya moment luar. Gambar 2.1 merupakan elemen truss yang pada kedua ujungnya menunjukkan kemungkinan perpindahan koordinat nodal  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ .



Gambar 2.1. Elemen struktur truss dengan koordinat nodal

Menurut Mario (1985) elemen matriks kekakuan  $[k]$  dan matriks massa  $[m]$  untuk struktur truss rangka bidang dapat dilihat pada persamaan berikut :

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.1)$$

dimana :

$[k]$  = matriks kekakuan

$A$  = luas penampang

$E$  = modulus elastisitas

$L$  = panjang

Sedangkan untuk matriks massa dapat dilihat pada persamaan berikut :

$$[m] = \frac{\bar{m}L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.2)$$

dimana :

$[m]$  = matriks massa

$\bar{m}$  = massa terdistribusi per unit panjang

$L$  = panjang

### 3.2.1.2. Matriks Redaman

Redaman pada struktur bukan merupakan hal yang mudah untuk dihitung. Pada penelitian ini redaman dianggap sebanding massa, sehingga matriks redaman dapat ditulis sebagai berikut :

$$[c] = a_m [m] \dots \dots \dots (2.3)$$

dimana :

$$a_m = 2\omega_r \zeta_r \dots \dots \dots (2.4)$$

### 3.2.1.3. Transformasi Koordinat

Matriks kekakuan dan matriks massa yang diberikan pada persamaan (1) dan (2) harus ditransformasi ke dalam koordinat global secara berturut-turut :

$$[\bar{k}] = [T]^T [k] [T] \dots \dots \dots (2.5)$$

dan

$$[\bar{m}] = [T]^T [m] [T] \dots \dots \dots (2.6)$$

Hubungan yang sama juga digunakan untuk matriks redaman dimana  $[\bar{c}]$  dan  $[c]$  secara berturut-turut adalah sistem koordinat global dan lokal.

$$[\bar{c}] = [T]^T [c] [T] \dots \dots \dots (2.7)$$

Matriks transformasi  $[T]$  dapat dilihat pada persamaan berikut :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2.8)$$

$\theta$  merupakan sudut antara sumbu global arah  $x$  dan elemen sumbu  $x$  batang pada sistem koordinat yang ditunjukkan gambar 2.1.

### 3.2.1.4. Kondensasi Statik

Kondensasi statik dilakukan untuk mereduksi jumlah derajat kebebasan yang harus diselesaikan dalam suatu persamaan. Dengan cara ini ukuran persamaan yang harus diselesaikan akan lebih sederhana (Arfiadi, 2016b).

Ditinjau suatu persamaan keseimbangan statik

$$[K]\{U\} = \{P\} \dots \dots \dots (2.9)$$

dengan partisi matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} [K_{CC}] & [K_{CL}] \\ [K_{LC}] & [K_{LL}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_C\} \\ \{U_L\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_C\} \\ \{P_L\} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (2.10)$$

Pada persamaan (2.10)  $\{U_C\}$  adalah perpindahan yang akan di kondensasi sedangkan  $\{U_L\}$  adalah perpindahan yang akan dipertahankan. Dari persamaan submatriks yang pertama diperoleh

$$[K_{CC}]\{U_C\} + [K_{CL}]\{U_L\} = \{P_C\} \dots \dots \dots (2.11)$$

Sehingga diperoleh

$$\{U_C\} = [K_{CC}]^{-1}(\{P_C\} - [K_{CL}]\{U_L\}) \dots \dots \dots (2.12)$$

Dari persamaan submatriks yang kedua pada persamaan (2.12) diperoleh

$$[K_{LC}]\{U_C\} + [K_{LL}]\{U_L\} = \{P_L\} \dots \dots \dots (2.13)$$

dengan mensubstitusikan  $\{U_C\}$  dari persamaan (2.12) maka diperoleh

$$[K_{LC}][K_{CC}]^{-1}(\{P_C\} - [K_{CL}]\{U_L\}) + [K_{LL}]\{U_L\} = \{P_L\}$$

$$[K_{LC}][K_{CC}]^{-1}\{P_C\} - [K_{LC}][K_{CC}]^{-1}[K_{CL}]\{U_L\} + [K_{LL}]\{U_L\} = \{P_L\}$$

$$[K_{LC}][K_{CC}]^{-1}\{P_C\} + ([K_{LL}] - [K_{LC}][K_{CC}]^{-1}[K_{CL}])\{U_L\} = \{P_L\}$$

$$([K_{LL}] - [K_{LC}][K_{CC}]^{-1}[K_{CL}])\{U_L\} = \{P_L\} - [K_{LC}][K_{CC}]^{-1}\{P_C\} \dots\dots\dots(2.14)$$

Jika

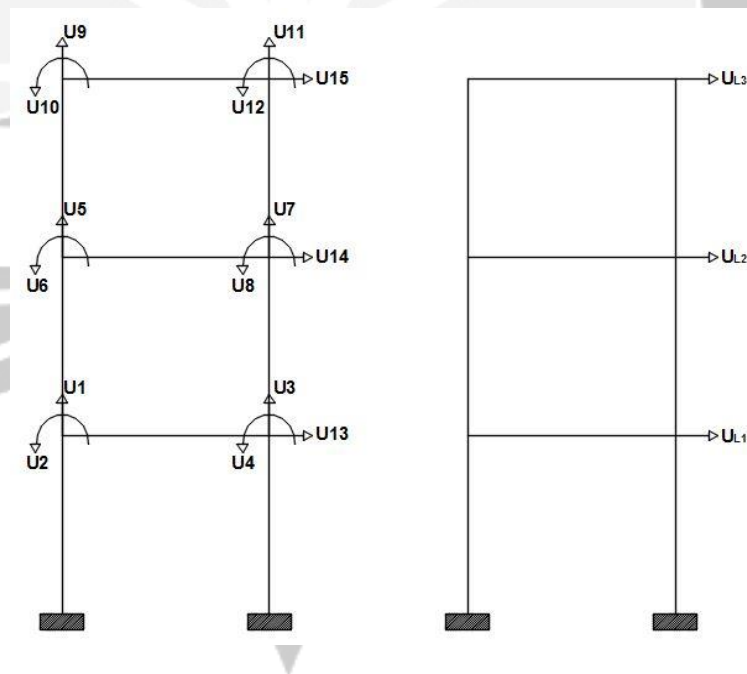
$$[K_{LL}^*] = [K_{LL}] - [K_{LC}][K_{CC}]^{-1}[K_{CL}] \dots\dots\dots(2.15)$$

$$\{P_L^*\} = \{P_L\} - [K_{LC}][K_{CC}]^{-1}\{P_C\} \dots\dots\dots(2.16)$$

maka persamaan (2.14) menjadi

$$[K_{LL}^*]\{U_L\} = \{P_L^*\} \dots\dots\dots(2.17)$$

Dalam permasalahan statik persamaan (2.15) dapat diselesaikan dulu untuk memperoleh  $\{U_L\}$ . Perpindahan pada derajat kebebasan yang dikondensasi kemudian dihitung dengan persamaan (2.12) sehingga semua perpindahan global dapat diperoleh (Arfiadi, 2016b).



(a) Sebelum dikondensasi

(b) Setelah dikondensasi

Gambar 2.2 Kondensasi statik pada struktur tiga lantai

Pada gambar 2.2(a) derajat kebebasan lainnya ( $U_1$  sampai  $U_{12}$ ) tidak dihilangkan dan nilainya dapat di peroleh dari persamaan (2.12) setelah  $U_L$  didapatkan. Matriks  $[K_{LL}^*]$  juga dikenal sebagai matriks kekakuan lateral dengan tanpa mengekang derajat kebebasan vertikal dan rotasi  $\{U_C\}$  (Arfiadi, 2016b).

### 3.2.2. Signal Processing

#### 3.2.2.1. Data dan Proses Random

Data yang diobservasi menggambarkan kejadian yang terkadang dapat dijelaskan dengan pendekatan hubungan matematik pada kasus data yang deterministik. Sebaliknya jika data random tidak diketahui maka tidak bisa dijelaskan dengan pendekatan matematik dan harus didekati dengan probabilistik.

Proses random merupakan kumpulan semua kemungkinan terjadi pada fenomena random. Kumpulan fungsi sampel (*ensemble*) diperlukan untuk mengkarakterkan suatu proses yang random dan dapat dihitung :

$$\mu_x(\bar{t}) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k(\bar{t}) \dots\dots\dots (2.18)$$

$\mu_x(\bar{t})$  = nilai rerata proses random

$x_k(\bar{t})$  = kumpulan fungsi ke  $k$

$\bar{t}$  = waktu sesaat tertentu

Autokorelasi dapat dihitung dengan cara yang sama yaitu rerata kumpulan hasil nilai pada waktu sesaat  $\bar{t}$  dan  $\bar{t} + \tau$  :



$$R_{xx}(\bar{t}, \bar{t} + \tau) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k(\bar{t}) x_k(\bar{t} + \tau) \dots \dots \dots (2.19)$$

Proses *weakly stationary random* dengan autokorelasi hanya tergantung pada jeda waktu  $\tau$  :

$$\mu_x(\bar{t}) = \mu_x \dots \dots \dots (2.20)$$

$$R_{xx}(\bar{t}, \bar{t} + \tau) = R_{xx}(\tau) \dots \dots \dots (2.21)$$

Hal yang telah dideskripsikan di atas merupakan ‘alat’ dalam analisis sinyal dan biasanya digunakan untuk mempersiapkan data pada kebanyakan teknik analisis modal operasional (OMA).

### 3.2.2.2. Transformasi Fourir Diskrit (DFT)

Transformasi Fourir mengubah *series* waktu kedalam osilasi harmonik dan mengubah sinyal domain waktu menjadi sinyal domain frekuensi. Semua data diwakili oleh sampel diskrit sehingga transformasi yang digunakan adalah transformasi fourir diskrit.

Fourir diskrit sinyal domain waktu :

$$y_n = \sum_{k=1}^N Y_k e^{i2\pi(k-1)(n-1)/N} \dots \dots \dots (2.22)$$

Fourir diskrit sinyal domain frekuensi :

$$Y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^n y_n e^{-i2\pi(k-1)(n-1)/N} \dots \dots \dots (2.23)$$

Total banyaknya pengukuran  $N = T\Delta t$  . Pengukuran N diambil pada saat waktu dan frekuensi yang sama yaitu  $r = k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  . Evaluasi untuk persamaan (3) membutuhkan operasi  $N^2$  sehingga dikembangkan

transformasi fourir cepat (FFT). Pengukuran  $N$  dibagi menjadi  $N = 2^p$  maka pengukuran dan metode tersebut hanya memerlukan operasi  $N \log_2 N$ .

### 3.2.2.3. *State Space Model*

Tinjauan *state space model* dalam penelitian ini mengacu pada persamaan yang telah dijabarkan pada Raineieri dan Fabbrocino (2014) dengan mengkonversikan permasalahan persamaan diferensial orde kedua menjadi persamaan diferensial orde pertama yang ditentukan dari persamaan *state* dan persamaan observasi. Persamaan diferensial orde kedua dituliskan sebagai berikut :

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{f(t)\} \dots\dots\dots(2.24)$$

Persamaan *state space* dapat diperoleh dengan memfaktorkan vektor gaya  $\{f(t)\}$  kedalam matriks  $[B]$  dan vektor  $\{u(t)\}$  yang secara berturut-turut merupakan lokasi *input* dan variasi waktu, sehingga persamaan (2.24) dapat ditulis ulang sebagai berikut :

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = [B]\{u(t)\} \dots\dots\dots(2.25)$$

Dibagi matriks  $[M]$  menjadi :

$$\{\ddot{y}(t)\} + [M]^{-1}[C]\{\dot{y}(t)\} + [M]^{-1}[K]\{y(t)\} = [M]^{-1}[B]\{u(t)\} \dots\dots\dots(2.26)$$

Vektor *state* didefinisikan sebagai :

$$\{s(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{y}(t)\} \\ \{y(t)\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.27)$$

Substitusinya diambil dari persamaan (2.26) dan menjadi identitas :

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} = [M]\{\dot{y}(t)\} \dots\dots\dots(2.28)$$

Menghasilkan persamaan :

$$\{\dot{s}(t)\} = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \{s(t)\} + \begin{bmatrix} [M]^{-1}[\bar{B}] \\ [0] \end{bmatrix} \{u(t)\} \dots\dots\dots(2.29)$$

Dari persamaan (2.29) matriks *state*  $[A_c]$  dan matriks pengaruh input  $[B_c]$  dapat ditentukan sebagai :

$$[A_c] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.30)$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} [M]^{-1}[\bar{B}] \\ [0] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.31)$$

Persamaan *state* dapat ditulis sebagai :

$$\{\dot{s}(t)\} = [A_c]\{s(t)\} + [B_c]\{u(t)\} \dots\dots\dots(2.32)$$

Subskrip *c* menunjukkan waktu kontinyu. Jika diasumsikan pengukuran respons struktur pada lokasi *l* dan berbagai sensor seperti *acclerometer*, *velocimeter*, dan transduser perpindahan. Vektor  $\{y_l(t)\}$  merupakan vektor *output* terukur dan matriks  $[C_a]$ ,  $[C_v]$ , dan  $[C_d]$  secara berturut-turut adalah matriks lokasi *output* dari percepatan, kecepatan, dan perpindahan.

Pada umumnya, persamaan observasi dapat ditulis sebagai berikut :

$$\{y_l(t)\} = [C_a]\{\ddot{y}(t)\} + [C_v]\{\dot{y}(t)\} + [C_d]\{y(t)\} \dots\dots\dots(2.33)$$

Substitusikan persamaan (2.25) kedalam (2.32) sehingga menghasilkan persamaan :

$$\{y_l(t)\} = ([C_v] - [C_a][M]^{-1}[C])\{\dot{y}(t)\} + ([C_d] - [C_a][M]^{-1}[K])\{y(t)\} + ([C_a][M]^{-1}[\bar{B}])\{u(t)\} \dots\dots(2.34)$$

Persamaan observasi :

$$\{y(t)\} = [C_c]\{s(t)\} + [D_c]\{u(t)\} \dots\dots\dots(2.35)$$

Matriks  $[C_c]$  merupakan matriks output pengaruh sedangkan matriks  $[D_c]$  adalah matriks transisi langsung yang dapat ditentukan dari persamaan (2.34), masukan persamaan (2.27).

$$[C_c] = [[C_v] - [C_a][M]^{-1}[C]] \quad [C_d] - [C_a][M]^{-1}[K] \dots\dots\dots(2.36)$$

$$[D_c] = [C_a][M]^{-1}[\bar{B}] \dots\dots\dots(2.37)$$

Perhitungan pengujian eksperimental dengan pengukuran diambil pada waktu diskrit sesaat sementara persamaan (2.32) dan (2.35) dinyatakan dalam waktu kontinyu sehingga model *state space* waktu kontinyu harus diubah ke bentuk waktu diskrit. Sebagai contoh pengambilan sampel perioda  $\Delta t$ , waktu diskrit sesaat  $t_k = k\Delta t$ . Asumsi *Zero order hold* (ZOH) menunjukan bahwa *input* sedikit konstan selama sampel periode. Berdasarkan asumsi tersebut maka model *state space* waktu diskrit dapat ditulis seperti persamaan (2.38) dan persamaan (2.39) berikut :

$$\{s_{k+1}\} = [A]\{s_k\} + [B]\{u_k\} \dots\dots\dots(2.38)$$

$$\{y_k\} = [C]\{s_k\} + [D]\{u_k\} \dots\dots\dots(2.39)$$

Matriks  $[A]$  merupakan matriks state diskrit, matriks  $[B]$  merupakan matriks input diskrit, matriks  $[C]$  merupakan matriks output diskrit dan matriks  $[D]$  adalah matriks transmisi langsung. Vektor  $\{s_k\} = \{s(k\Delta t)\}$  adalah vektor *state* waktu diskrit yang menghasilkan sampel perpindahan dan kecepatan. Vektor  $\{u_k\}$  dan vektor  $\{y_k\}$  secara berturut-turut adalah

input sampel dan output sampel. Hubungan antara matriks waktu kontinyu dan matriks waktu diskrit adalah :

$$[A] = e^{[A_c]\Delta t} \dots\dots\dots(2.40)$$

$$[B] = ([A] - [I])[A_c]^{-1}[B_c] \dots\dots\dots(2.41)$$

$$[C] = [C_c] \dots\dots\dots(2.42)$$

$$[D] = [D_c] \dots\dots\dots(2.43)$$

Persamaan (2.38) dan (2.39) merupakan model deterministik selama input nya deterministik. Komponen stokastik perlu disertakan untuk menggambarkan data pengukuran aktual. Setelah komponen stokastik dimasukkan ke dalam model, persamaan menjadi model *state space* waktu diskrit kombinasi deterministik stokastik yang ditulis :

$$\{s_{k+1}\} = [A]\{s_k\} + [B]\{u_k\} + \{w_k\} \dots\dots\dots(2.44)$$

$$\{y_k\} = [C]\{s_k\} + [D]\{u_k\} + \{v_k\} \dots\dots\dots(2.45)$$

dengan vektor  $\{w_k\}$  merupakan proses *noise* karena gangguan dan ketidakakuratan model. Vektor  $\{v_k\}$  adalah pengukuran *noise* karena ketidakakuratan sensor. Metode analisis modal operasional (OMA) memuat informasi tentang *input* vektor  $\{u_k\}$  yang tidak diketahui maka dari itu *output* sistem hanya ditentukan berdasarkan vektor  $\{w_k\}$  dan vektor  $\{v_k\}$ . Hal tersebut menjadikan model *state space* waktu diskrit stokastik :

$$\{s_{k+1}\} = [A]\{s_k\} + \{w_k\} \dots\dots\dots(2.46)$$

$$\{y_k\} = [C]\{s_k\} + \{v_k\} \dots\dots\dots(2.47)$$

Proses *noise* dan pengukuran *noise* tidak dapat diukur, maka diasumsikan *zero mean, stationary noise process* dengan matriks kovarian sebagai berikut :

$p = q$ , maka

$$E \left[ \begin{Bmatrix} \{w_p\} \\ \{v_p\} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_q\}^T & \{v_q\}^T \end{Bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} Q^{ww} & S^{wv} \\ S^{wv}{}^T & R^{vv} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.48)$$

Sedangkan untuk  $p \neq q$

$$E \left[ \begin{Bmatrix} \{w_p\} \\ \{v_p\} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_q\}^T & \{v_q\}^T \end{Bmatrix} \right] = [0] \dots\dots\dots(2.49)$$

Dimana  $p$  dan  $q$  adalah waktu sembarang sesaat. Respons sistem pada model *state space* dinyatakan dengan proses *zero mean Gaussian*. Output matriks kovarian ditunjukkan sebagai berikut :

$$[R_i] = E[\{y_{k+i}\}\{y_k\}^T] \dots\dots\dots(2.50)$$

Vektor *state* waktu diskrit  $[s_k]$  juga merupakan proses *zero mean Gaussian*, dan kovarian vektor *state* menjadi:

$$[\Sigma] = E[\{s_k\}\{s_k\}^T] \dots\dots\dots(2.51)$$

Vektor  $\{s_k\}$  tidak berkorelasi dengan vektor  $\{w_k\}$  dan vektor  $\{v_k\}$ , maka :

$$E[\{s_k\}\{w_k\}^T] = [0] \dots\dots\dots(2.52)$$

$$E[\{s_k\}\{v_k\}^T] = [0] \dots\dots\dots(2.53)$$

Asumsi tentang *noise* tersebut dimasukan kedalam perhitungan dan manipulasi matematik untuk persamaan *state space* persamaan (2.46) dan (2.47) memberikan hubungan fundamental sebagai berikut :

$$[\Sigma] = [A][\Sigma][A]^T + [Q^{ww}] \dots\dots\dots(2.54)$$

$$[R_0] = [C][\Sigma][C]^T + [R^{vv}] \dots\dots\dots(2.55)$$

$$[G] = [A][\Sigma][C]^T + [S^{wv}] \dots\dots\dots(2.56)$$

$$[R_i] = [C][A]^{i-1} + [G] \dots\dots\dots(2.57)$$

Dimana :

$$[G] = E[\{s_{k+1}\}\{y_k\}^T] \dots\dots\dots(2.58)$$

### 3.2.3. Metode *Second Order Blind Identification* (SOBI)

*Second blind order identification* adalah metode non parametrik yang mengekstrak sejumlah sinyal (*source*) dan diidentifikasi sebagai domain waktu. Data input yang diperlukan untuk algoritma ini adalah data matriks  $[Y]$  dan waktu  $\Delta t$ . Respons terukur diasumsikan sebagai campuran sumber sinyal statik dan linear dan dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\{y(t)\} = [A]\{s(t)\} + \{n(t)\} \dots\dots\dots(2.59)$$

Dimana :

$\{y(t)\}$  = campuran sinyal terobservasi

$[A]$  = *mixing matrix*

$\{s(t)\}$  = sumber sinyal

$\{n(t)\}$  = *noise sensor*

Langkah awal perhitungan algoritma SOBI adalah *centering* (*zero mean*) dan *whitening* data :

$$[z] = [W][Y_c] \dots\dots\dots (2.60)$$

$[Y_c]$  = matriks data terpusat

$[W]$  = *whitening matrix*

$[z]$  = *whitened data*

Ambil *singular value decomposition* (SVD) dari data terpusat  $[Y_c]$  :

$$[Y_c] = [U][\Sigma][V]^T \dots\dots\dots (2.61)$$

*Whitening matrix*  $[W]$  dihitung :

$$[W] = [\Sigma]^+ [V]^T \dots\dots\dots (2.62)$$

Matriks kovarian perpindahan waktu harus dihitung :

$$[R_z(\tau_k)] \dots\dots\dots (2.63)$$

Dimana :

$$k = 1, 2, \dots, p$$

Teknik *joint approximation diagonalization* (JAD) digunakan pada matriks kovarian perpindahan waktu yang tujuannya adalah menentukan *unitary matrix*  $[\tilde{A}']$  dengan meminimalkan jumlah *off diagonal* yang terlihat pada persamaan berikut :

$$\min \sum_{k=1}^n ([\tilde{A}']^T [R_z(\tau_k)] [\tilde{A}']) \dots\dots\dots (2.64)$$

Solusi dari permasalahan ini dapat dikerjakan dengan algoritma numerik berdasarkan teknik rotasi Jacobi. Ada 2 parameter yang harus ditentukan



yaitu banyaknya *time lags*  $p$  dan *threshold*  $t$ . Nilai tersebut ditentukan untuk awalan :

$$p = \min(100, N/3) \dots \dots \dots (2.65)$$

Nilai tersebut dipilih karena performa dari diagonalisasi semakin baik dengan semakin bertambahnya nilai  $p$  tetapi dengan cepat *converge*. Sedangkan untuk nilai *threshold* (batas) dimana JAD harus berhenti, nilai yang dipilih sebagai awalan :

$$t = \frac{1}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (2.66)$$

Setelah *unitary matrix*  $[\tilde{A}']$  ditemukan *mixing matrix*  $[A_m]$  dapat dihitung:

$$[A_m] = [W]^+ [\tilde{A}'] \dots \dots \dots (2.67)$$

Sumber sinyal  $[s_0(t)]$  :

$$[s_0(t)] = [\tilde{A}']^T * [z(t)] \dots \dots \dots (2.68)$$

Ragam bentuk dapat ditemukan langsung dari kolom *mixing matrix*. Frekuensi alami dan rasio redaman ditentukan dengan estimator *curve fitting* SDOF yang didasarkan pada FFT dan kemudian mengambil satu *peak*.

### 3.2.4. Deteksi Kerusakan

Indikasi kerusakan merupakan langkah awal (level 1) deteksi kerusakan pada struktur dan dapat dilakukan dengan membandingkan ragam bentuk pada struktur normal dan struktur rusak melalui *modal*

*assurance criterion* (MAC). Nilai *modal assurance criterion* (MAC) dapat dihitung dengan persamaan berikut :

$$MAC(\{\phi_n^a\}, \{\phi_n^e\}) = \frac{|\{\phi_n^a\}^T \{\phi_n^e\}|^2}{(\{\phi_n^a\}^T \{\phi_n^a\})(\{\phi_n^e\}^T \{\phi_n^e\})} \dots\dots\dots (2.69)$$

Dimana

$\{\phi_n^e\}$  = ragam bentuk ke  $n$  terestimasi hasil eksperimental struktur rusak

$\{\phi_n^a\}$  = ragam bentuk ke  $n$  terestimasi hasil eksperimental struktur normal

Nilai MAC berada diantara 0 dan 1 secara berturut-turut menunjukkan tidak konsisten dan sangat konsisten.

Indikasi kerusakan struktur juga dapat dilihat dari pengurangan frekuensi alami terutama ragam bentuk pertama (Bernagozzi, *et al.*, 2016).

Peraturan Pemeriksaan Jembatan Rangka Baja No. 005/BM/2009

Pedoman Konstruksi dan Bangunan Kementrian Pekerjaan Umum

Direktorat Jendral Bina Marga menetapkan tingkat kerusakan dengan rasio

( $k$ ), yaitu perbedaan  $\Delta f$  antara frekuensi alami terukur di lapangan dengan frekuensi alami teoritis terhadap frekuensi alami utuh jembatan.

Nilai  $k$  dan kriteria penilaian dapat dikelompokan seperti pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Kondisi Kriteria Rasio Frekuensi ( $k$ )

No	Rasio frekuensi ( $k$ ) %	Kriteria
1	$\geq 20$	Kritis (telah terjadi retak struktural)
2	$15 \leq k \leq 20$	Kurang
3	10	Kurang cukup
4	0	Baik

Sumber : Pedoman pemeriksaan jembatan rangka baja kementrian pekerjaan umum direktorat jendral bina marga 2009.