

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA DAN LANDASAN TEORI

2.1. Tinjauan Pustaka

2.1.1. Sistem Identifikasi Metode SSI

Sistem identifikasi adalah suatu proses untuk menemukan sebuah modal eksperimental struktur dari data pengukuran vibrasi, sedangkan EMA dan OMA merupakan teknik aplikasi dari sistem identifikasi (Peeters, 2000). Menurut Brincker (2014) keuntungan OMA dibanding EMA adalah dapat menghasilkan parameter-parameter modal struktur tanpa mengetahui gaya-gaya eksitasi karena hanya memanfaatkan output pengukuran. Itulah mengapa teknik OMA paling efisien dan sering digunakan dalam identifikasi parameter modal struktur teknik sipil yang kebanyakan berukuran besar dan rumit. Peeters dan De Roeck (1999c) mengklasifikasikan OMA dalam domain waktu dan domain frekuensi. Dalam domain waktu metode SSI merupakan metode yang sangat *powerful* dan paling *applicable* dalam *output-only modal analysis* sejak diperkenalkan oleh Van Overschee dan De Moor pada tahun 1993 (Peeters dan De Roeck, 2001).

Metode SSI diklasifikasikan sebagai *Covariance Stochastic Subspace identification* (Cov-SSI) dan *Data-Driven Stochastics Subspace Identification* (DD-SSI) (Peeters dan De Roeck, 1999c). Perbedaan algoritma Cov-SSI dan DD-SSI adalah pada perhitungan matriks data Hankel dimana Cov-SSI memperhitungkan kovarians semua output baik output masa depan dan output masa lalu, sedangkan DD-SSI memproyeksikan ruang baris output masa depan ke dalam ruang baris output masa lalu. Hal ini mengurangi dimensi matriks data Hankel sehingga mempercepat proses perhitungan (Peeters dan De roeck, 1999).

Salah satu penelitian yang mengulas secara cukup lengkap tentang metode SSI dapat dilihat pada Peeters (2000).

Penerapan metode SSI juga telah banyak dilakukan para peneliti pada simulasi struktur, tes laboratorium, dan struktur sipil yang sebenarnya. Peeters dkk (1995) melakukan penelitian terhadap model jembatan box girder baik simulasi numerik dan tes laboratorium, metode SSI sangat baik dalam mengidentifikasi struktur bergetar dengan eksitasi beban *ambient*. Hasilnya simulasi numerik dan tes laboratorium memberikan hasil parameter dinamik yang akurat. Peeters dkk (1996) melakukan penelitian pada balok beton bertulang untuk mengidentifikasi perubahan parameter dinamik yang disebabkan oleh *crack* pada beton bertulang yang disebabkan peningkatan beban statik. Hasilnya sesuai dengan yang diharapkan dan sesuai dengan hasil simulasi model numerik, eigenfrekuensi berkurang 7-18%, rasio redaman yang didapatkan cukup akurat, dan bentuk ragam struktur berubah.

Schanke (2015) melakukan penelitian untuk membandingkan beberapa metode OMA baik dalam domain waktu maupun dalam domain frekuensi untuk mengidentifikasi parameter modal dari model simulasi bangunan rangka geser dan model struktur jembatan Hardanger. Hasil penelitiannya untuk model simulasi bangunan geser yang dimodelkan dengan redaman yang rendah dan tinggi, metode DD-SSI menghasilkan frekuensi alami yang akurat untuk model dengan redaman rendah sedangkan untuk redaman tinggi sedikit kurang akurat. Rasio redaman yang dihasilkan kurang akurat untuk model redaman rendah sedangkan untuk redaman tinggi sangat akurat.

Happy Asisi Kurniawan (2018) dalam penelitiannya menyatakan bahwa frekuensi alami hasil analisis eksak dan DD-SSI untuk struktur rangka geser dan balok menunjukkan akurasi yang sangat baik dengan rasio perbedaan terbesar 1.613%. Rasio perbandingan frekuensi alami dan rasio redaman antara struktur utuh dan rusak hasil analisis DD-SSI menunjukkan hasil yang sesuai dengan rasio pengurangan penampang elemen struktur.

2.1.2. Test Getaran Ambien

Rainieri (2008) melakukan pengujian getaran *ambient* yang dianggap sebagai suatu cara non-destruktif yang efektif untuk menghasilkan data pengujian dalam menilai perilaku dinamik suatu struktur. Jika dibandingkan dengan teknik EMA yang menggunakan *Shacker* atau *Drop Weight* untuk menggetarkan struktur yang diteliti. Pengujian getaran *Ambient* mempunyai keuntungan sebagai berikut: (1) lebih cepat dan lebih murah dibanding teknik EMA; (2) tidak membutuhkan peralatan eksitasi; (3) tidak mengganggu aktifitas normal yang dilakukan pada struktur yang diteliti; (4) memungkinkan identifikasi parameter modal yang mewakili seluruh sistem dibawah pengaruh kondisi sebenarnya; (5) dapat juga digunakan untuk monitoring kesehatan struktur dan deteksi kerusakan berdasarkan getaran.

2.1.3. Low Cost Sensor Accelerometer MEMS

Penggunaan sensor *Low Cost accelerometer Mechanical Electronic Micro System (MEMS)* dalam dunia teknik sipil sekarang ini sangat memudahkan dalam mengidentifikasi parameter dinamik struktur, baik dalam pembiayaan, kemudahan pemasangan, juga keandalan dalam menganalisis parameter dinamik struktur. Beskhyroun dan Ma (2012) berhasil menggunakan sensor *accelerometer X6-1A*

produksi *Gulf Coast Data Concept (GCDC)* untuk mengukur respons tiga bangunan beton bertulang yang dikenai eksitasi gempa bumi. Sensor berhasil dimanfaatkan untuk merekam beberapa respons dari tiga bangunan tinggi beton bertulang akibat gempa susulan di kota Christchurch-Selandia Baru setelah kota itu dilanda dua gempa bumi besar. Data respons yang terekam menghasilkan perkiraan parameter modal yang sangat akurat dari bangunan.

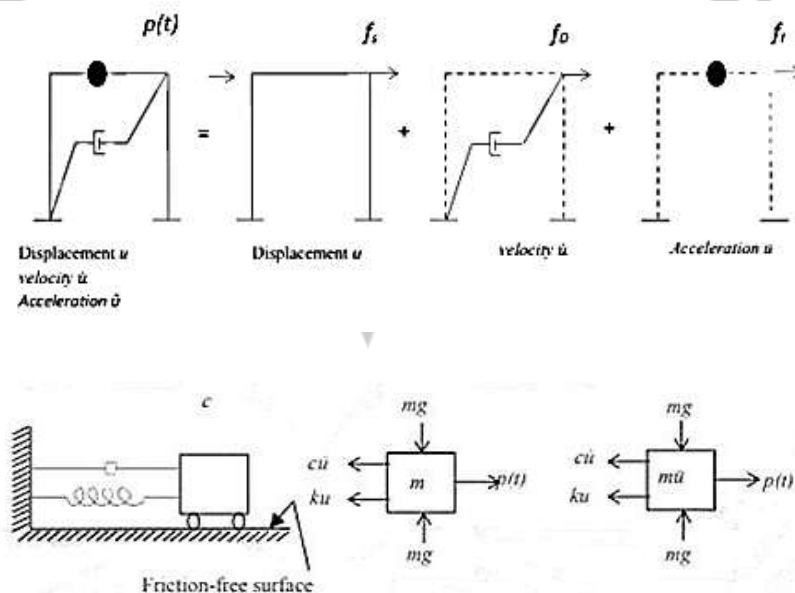
2.2. Landasan Teori

2.2.1. Metode Simulasi Numerik

2.2.1.1. Persamaan Gerak Sistem Dinamik

a. Sistem *Single Degree of Freedom (SDOF)*

Sistem derajat kebebasan tunggal atau *Single Degree of Freedom (SDOF)* hanya akan mempunyai satu koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi massa pada saat tertentu yang ditinjau. Bangunan satu tingkat adalah salah satu contoh bangunan derajat kebebasan tunggal.



Gambar 1.1. Modelisasi Kesetimbangan Dinamik SDOF (Chopra,1995)

Dari pemodelan diatas dapat disuperposisikan dengan menggunakan hukum kesetimbangan Newton kedua, dimana gaya-gaya yang dialami struktur:

$p(t)$: gaya luar yang akan didistribusikan keseluruhan struktur

$fl = m\ddot{u}$: gaya luar komponen massa terhadap percepatan gerakan tanah

$fd = c\dot{u}$: gaya luar komponen redaman terhadap percepatan gerakan tanah

$fs = ku$: gaya luar komponen kekakuan terhadap percepatan gerakan tanah

Berdasarkan modelisasi pada Gambar 1.1 maka diperoleh rumus :

$p(t) = fs + fd + fl$ atau dapat juga ditulis;

$$p(t) = m\ddot{u} + c\dot{u} + k u \dots\dots\dots(1.1)$$

untuk linear sistem hubungan antara gaya lateral dan deformasi u adalah

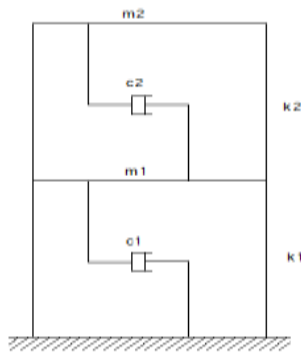
$$fs=ku \dots\dots\dots(1.2)$$

kekakuan lateral

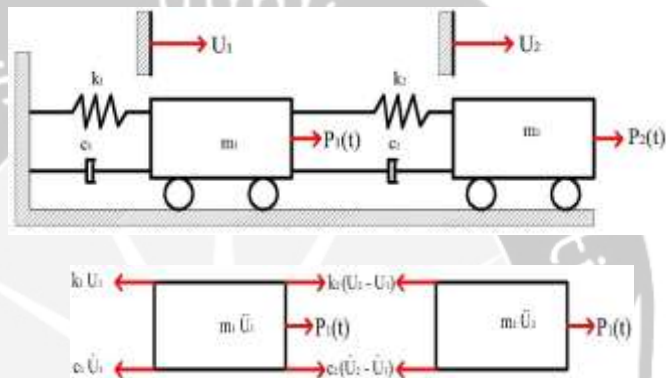
$$k = \frac{3EI}{h^3} \dots\dots\dots(1.3)$$

b. Sistem *Multi Degree of Freedom (MDOF)*

Untuk menyatakan persamaan diferensial gerakan pada struktur dengan derajat kebebasan banyak / majemuk maka digunakan anggapan dan pendekatan seperti struktur dengan derajat kebebasan tunggal SDOF. Guna memperoleh persamaan deferensial tersebut, maka tetap dipakai prinsip kesetimbangan dinamik (*dynamic equilibrium*) pada suatu massa yang ditinjau. Contoh struktur MDOF dapat dilihat pada Gambar 1.2 berikut:



Gambar 1.2. Contoh Model Frame



Gambar 1.3. Modelisasi kesetimbangan dinamik MDOF

Berdasarkan Gambar 1.3. didapat persamaan gerak sebagai berikut:

$$m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 - \{c_2(u_2 - u_1)\} + k_1 u_1 \{k_2(u_2 - u_1)\} - p_1(t) = 0 \dots\dots\dots(1.4)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) - p_2(t) = 0 \dots\dots\dots; \dots\dots\dots(1.5)$$

disusun dalam bentuk matriks, menjadi;

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(1.6)$$

secara sederhana dapat ditulis menjadi

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{P(t)\} \dots\dots\dots(1.7)$$

dengan [M], [C], [K] berturut-turut adalah matriks massa, matriks redaman dan matriks kekakuan struktur

2.2.1.2. Kekakuan Struktur

a. Kekakuan dalam koordinat lokal

Dalam metode matriks kekakuan struktur, derajat kebebasan yang dimiliki suatu elemen frame dianggap sesuai dengan perpindahan bebas tiap titik kumpul, sehingga matriks kekakuannya menjadi:

$$[k]= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1.8)$$

dimana :

- [k] = matriks kekakuan dalam koordinat lokal
- E = modulus elastisitas material
- A = luas penampang
- I = momen inersia batang
- L = panjang balok

b. Kekakuan dalam koordinat global

Untuk membentuk matriks kekakuan struktur, matriks kekakuan dalam koordinat lokal harus ditransformasikan menjadi matriks kekakuan dalam koordinat global, yaitu:

$$[K] = [T]^T [k] [T] \dots\dots\dots(1.9)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1.9a)$$

Dimana,

[K] = matriks kekakuan dalam koordinat global

$[k]$ = matriks kekakuan dalam koordinat lokal

$[T]$ = matriks transformasi elemen batang

2.2.1.3. Massa

Massa struktur dapat dianggap terpusat pada suatu titik diskritnya atau dianggap terdistribusi merata pada elemen struktur. Untuk analisis gedung sering dianggap massa gedung terpusat pada lantai - lantainya. Dalam hal ini matriks massa menjadi matriks diagonal.

Sebagai contoh untuk portal bidang n lantai, maka matriks massa:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.0)$$

Dalam kasus terdistribusi merata pada elemen struktur, matriks massa dapat dibentuk menggunakan fungsi bentuk yang sama yang digunakan dalam matriks kekakuan. Matriks massa dalam koordinat lokal dapat diperoleh dari :

$$m = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 126 & 22L & 0 & 54 & -13EL^2 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -13EL^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22 \\ 0 & -13L & 3L^2 & 0 & -22 & 4L^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.1)$$

Dimana :

$[m]$ = matriks massa dalam koordinat lokal

\bar{m} = massa per meter panjang

L = panjang balok

ρ = massa jenis

Dengan cara yang sama dalam penyelesaian matriks kekakuan, matriks massa dalam kekakuan global diperoleh dengan:

$$[M] = [T]^T [m][T] \dots\dots\dots(2.2)$$

Teknik kondensasi juga dapat digunakan untuk mereduksi derajat kebebasan, sehingga penyelesaian bisa lebih sederhana (Arfiadi Y, 2016).

2.2.1.4. Redaman

Redaman merupakan proses dimana getaran bebas berkurang amplitudonya (Chopra,1995). Pada redaman, energi dari sistem yang bergetar terdissipasi melalui berbagai macam mekanisme. Pada struktur gedung yang bergetar mekanisme energi yang terjadi antara lain gesekan pada sambungan baja, opening dan closing microcrack pada beton, gesekan antara struktur dengan komponen non struktural seperti dinding. Nampaknya hampir tidak mungkin untuk mengidentifikasi atau mendeskripsikan secara matematis setiap mekanisme dissipasi energi yang terjadi pada struktur, sehingga untuk menentukan rasio redaman secara akurat harus dilakukan secara eksperimen. Tetapi hal tersebut jarang dilakukan karena terbatasnya waktu dan dana. Untuk struktur baru yang akan dibangun hal tersebut tidak bisa dilakukan sehingga dalam menentukan rasio redaman suatu struktur dilakukan dengan melakukan estimasi.

Sebuah teori redaman klasik yang cukup populer adalah teori redaman Rayleigh. Teori ini menganggap redaman sebanding massa dan redaman sebanding kekakuan struktur atau redaman sebanding massa dan kekakuan struktur. Asumsi pertama redaman sebanding massa dan redaman sebanding kekakuan (Chopra, 2011):

$$C = a_m \times M \dots\dots\dots(2.3)$$

$$C = a_k \times K \dots\dots\dots(2.4)$$

dimana a_m adalah konstanta redaman sebanding massa sec^{-1} dan a_k adalah konstanta redaman sebanding kekakuan (sec), dengan

$$a_m = \zeta \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \dots\dots\dots(2.4a)$$

$$a_k = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \dots\dots\dots(2.4b)$$

ζ adalah rasio redaman (%), ω_i adalah frekuensi natural mode ke-i dan ω_j adalah frekuensi natural mode ke-j. Redaman yang dihasilkan dari teori ini merupakan idealisasi yang tepat jika mekanisme redaman yang serupa terdistribusi diseluruh struktur. Newmark dan Hall (1982) menentukan rekomendasi nilai rasio redaman untuk beberapa tipe dan kondisi struktur.

Tabel 1.1. Rekomendasi Nilai Rasio Redaman Untuk Tipe dan Jenis Struktur

Stress Level	Type and condition of structure	Damping Ratio (%)
Working stress, no more than about 1/2 yield point	Welded steel, prestressed concrete, well-reinforced concrete (only slight cracking)	2-3
	Reinforced concrete with considerable cracking	3-5
	Bolted and or riveted steel, wood structures with nailed or bolted joints	5-7
At or just below yield point	Welded steel, prestressed concrete (without complete loss in prestress)	5-7
	Prestressed concrete with no prestress left	7-10
	Reinforced concrete	7-10
	Bolted and or riveted steel, wood structures with bolted joints	10-15
	Wood structures with nailed joints	15-20

2.2.1.5. Kondensasi Statik

Metode kondensasi statik merupakan metode praktis untuk mereduksi derajat kebebasan struktur menjadi lebih sederhana yang disebut derajat kebebasan kedua (*secondary degrees of freedom*), dimana hubungan antara derajat kebebasan kedua dan pertama didapat dengan menentukan hubungan statik antara keduanya (Paz, 2004). Berikut langkah-langkah untuk mengeliminasi derajat kebebasan yang tak diinginkan.

Misalnya ditinjau suatu persamaan keseimbangan statik :

$$[K]\{U\} = \{P\} \dots\dots\dots(2.5)$$

Diasumsikan bahwa derajat kebebasan kedua yang akan direduksi tersusun sebagai koordinat C dan derajat kebebasan pertama sebagai koordinat L . Dengan partisi matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} [K_{CC}] & \vdots & [K_{CL}] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [K_{LC}] & \vdots & [K_{LL}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_C\} \\ \dots \\ \{U_L\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_C\} \\ \dots \\ \{P_L\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.6)$$

Pada persamaan (2.6), $\{U_C\}$ adalah perpindahan yang akan dikondensasi sedangkan $\{U_L\}$ adalah perpindahan yang akan dipertahankan.

$$[K_{CC}]\{U_C\} + [K_{CL}]\{U_L\} = \{P_C\} \dots\dots\dots(2.6a)$$

Sehingga diperoleh

$$\{U_C\} = [K_{CC}]^{-1} (\{P_C\} - [K_{CL}]\{U_L\}) \dots\dots\dots(2.6b)$$

Dari persamaan submatriks kedua pada persamaan 2.6 diperoleh:

$$[K_{LC}]\{U_C\} + [K_{LL}]\{U_L\} = \{P_L\} \dots\dots\dots(2.7)$$

Substitusi $\{U_C\}$ ke persamaan 2.7, diperoleh:

$$[K_{LC}][K_{CC}]^{-1}(\{P_C\} - [K_{CL}]\{U_L\}) + [K_{LL}]\{U_L\} = \{P_L\} \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

$$([K_{LL}] - [K_{LC}][K_{CC}]^{-1}[K_{CL}])\{U_L\} = \{P_L\} - [K_{LC}][K_{CC}]^{-1}\{P_C\} \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

Jika

$$[K_{LL}^*] = [K_{LL}] - [K_{LC}][K_{CC}]^{-1}[K_{CL}] \quad \dots\dots\dots(2.9a)$$

$$\{P_L^*\} = \{P_L\} - [K_{LC}][K_{CC}]^{-1}\{P_C\} \quad \dots\dots\dots(2.9b)$$

Maka persamaan (2.9) menjadi:

$$[K_{LL}^*]\{U_L\} = \{P_L^*\} \quad \dots\dots\dots(2.9c)$$

Menurut Arfiadi (2016) dalam permasalahan statik, persamaan 2.9c dapat diselesaikan dulu untuk memperoleh $\{U_L\}$. Perpindahan pada derajat kebebasan yang dikondensasi kemudian dihitung dengan persamaan (2.6b) sehingga semua perpindahan global dapat diperoleh.

2.2.2. *Operation Modal Analysis (OMA)*

Sistem identifikasi adalah suatu proses untuk menemukan sebuah modal eksperimental struktur dari data pengukuran vibrasi, sedangkan EMA dan OMA merupakan teknik aplikasi dari sistem identifikasi Peeters (2000). Keuntungan OMA dibanding EMA adalah menghasilkan parameter-parameter modal struktur tanpa mengetahui gaya-gaya eksitasi karena hanya memanfaatkan output pengukuran Brincker (2014). Hal inilah membuat teknik OMA lebih banyak digunakan dalam mengidentifikasi parameter modal struktur baik dalam domain waktu maupun dalam domain frekuensi. Dalam domain waktu direpresentasikan sebagai satu set persamaan differensial sedangkan dalam domain frekuensi berupa satu set persamaan aljabar.

2.2.2.1. Domain Waktu

Secara tradisional persamaan gerak dalam domain waktu untuk sistem umum derajat kebebasan banyak (MDOF) adalah:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{f(t)\} \dots\dots\dots(3.0)$$

Dengan $[M]$ matriks massa, $[C]$ matriks redaman, $[K]$ matriks kekakuan, $\{\ddot{y}(t)\}$ percepatan, $\{\dot{y}(t)\}$ kecepatan, dan $\{y(t)\}$. Salah satu cara untuk mengekstrak parameter modal adalah dengan memecahkan persamaan diferensial ordo pertama (Chopra (2011) dan mengasumsikan persamaan diferensial ini memiliki solusi dalam bentuk:

$$\{y(t)\} = [q]e^{\lambda t} \dots\dots\dots(3.1)$$

Dengan $[q]$ adalah *eigenvector* dan λ adalah *eigenvalue* . Turunan dari persamaan 3.1 menghasilkan:

$$\{\dot{y}(t)\} = \lambda[q]e^{\lambda t} \dots\dots\dots(3.1a)$$

$$\{\ddot{y}(t)\} = \lambda^2[q]e^{\lambda t} \dots\dots\dots(3.1b)$$

Persamaan 3.1, 3.1a, 3.1b disubstitusikan ke dalam persamaan 3.0 dan diasumsikan sistem tidak dibebani atau $f(t) = 0$, menjadi:

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])q = \{0\} \dots\dots\dots(3.2)$$

Penyelesaian persamaan 3.2 tergantung pada nilai redaman sistem. Untuk kebanyakan struktur teknik sipil redaman dari suatu sistem *underdamped* , λ adalah pasangan konjungasi kompleks, maka:

$$\lambda_k = -\xi\omega_n \pm \sqrt{1-\xi^2}\omega_n i \dots\dots\dots(3.3)$$

yang menghasilkan:

$$\omega_n = |\lambda_k| \dots\dots\dots(3.3a)$$

$$\omega_d = \text{Im}(\lambda_k) \dots\dots\dots(3.3b)$$

$$\xi = \frac{\text{Re}(\lambda_k)}{|\lambda_k|} \dots\dots\dots(3.3c)$$

2.2.2.2. State-Space Model

State-space model digunakan untuk mengkonversi persamaan diferensial ordo kedua menjadi dua persamaan diferensial ordo pertama yang didefinisikan sebagai persamaan *state* dan persamaan observasi. Persamaan *state* diperoleh dengan memfaktorisasi $\{f(t)\}$ ke $[\bar{B}]$ dan $\{u(t)\}$ pada persamaan 3.0. Dimana $[\bar{B}]$ adalah lokasi input dan vektor $\{u(t)\}$ merupakan variasi waktu (Rainier dan Fabbrocino, 2011), sehingga persamaan diferensial ordo kedua (*state*) dapat ditulis kembali menjadi:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = [\bar{B}]\{u(t)\} \dots\dots\dots(3.4)$$

Persamaan diatas dibagi dengan $[M]$ menjadi

$$\{\ddot{y}(t)\} + [M]^{-1}[C]\{\dot{y}(t)\} + [M]^{-1}[K]\{y(t)\} = [M]^{-1}[\bar{B}]\{u(t)\} \dots\dots\dots(3.5)$$

State vector $\{z(t)\}$ didefinisikan sebagai

$$\{z(t)\} = \begin{bmatrix} \{y(t)\} \\ \{\dot{y}(t)\} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.6)$$

Dan turunan dari *state vector*

$$\{\dot{z}(t)\} = \begin{bmatrix} \{\dot{y}(t)\} \\ \{\ddot{y}(t)\} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.7)$$

Persamaan 3.6 disubstitusikan ke dalam persamaan 3.5 menjadi:

$$\{\ddot{y}(t)\} = [-[M]^{-1}[C] \quad -[M]^{-1}[K]]\{z(t)\} + [[M]^{-1}[\bar{B}]]\{u(t)\} \dots\dots\dots(3.8)$$

Dan dari persamaan 3.6 didapat:

$$\{\dot{y}(t)\} = [[I] \quad [0]]\{z(t)\} \dots\dots\dots(3.9)$$

Persamaan 3.8 dan 3.9 disubstitusikan ke persamaan 3.7 akan menjadi:

$$\{\dot{z}(t)\} = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \{z(t)\} + \begin{bmatrix} [M]^{-1}[\bar{B}] \\ [0] \end{bmatrix} \{u(t)\} \dots\dots\dots(4.0)$$

Dari persamaan 4.0 matriks *state* $[A_c]$ dan matriks pengaruh input $[B_c]$ dapat di definisikan:

$$[A_c] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.1)$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} [M]^{-1}[\bar{B}] \\ [0] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.2)$$

Dan menghasilkan persamaan *state*:

$$\{\dot{z}(t)\} = [A_c]\{z(t)\} + [B_c]\{u(t)\} \dots\dots\dots(4.3)$$

Jika diasumsikan pengukuran diambil di lokasi l dan sensor yang digunakan *accelerometers* (istilah pertama), *velocimeters* (istilah kedua) dan *transducer* perpindahan (istilah ketiga) persamaan pengamatan dapat ditulis sebagai:

$$\{y(t)\} = [C_a]\{\ddot{y}(t)\} + [C_v]\{\dot{y}(t)\} + [C_d]\{y(t)\} \dots\dots\dots(4.4)$$

Persamaan 3.6 dan persamaan 3.8 disubstitusikan ke persamaan 4.4 maka:

$$\{y(t)\} = [[C_v] - [C_a][M]^{-1}[C] \quad [C_d] - [C_a][M]^{-1}[K]]\{z(t)\} + [[C_a][M]^{-1}[\bar{B}]]\{u(t)\} \dots\dots(4.5)$$

Karena

$$[C_c] = \begin{bmatrix} [C_v] - [C_a][M]^{-1}[C] & [C_d] - [C_a][M]^{-1}[K] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.5a)$$

$$[D_c] = [C_a][M]^{-1}[\bar{B}] \dots\dots\dots(4.5b)$$

maka persamaan 4.5 menjadi:

$$\{y_l(t)\} = [C_c]\{z(t)\} + [D_c]\{u(t)\} \dots\dots\dots(4.6)$$

Waktu pengukuran dilapangan dalam *discret time instans*, jadi persamaan 4.3 dan persamaan 4.6 harus dikonversi ke waktu diskrit. Untuk periode sampling Δt , *discrete time instans* adalah $t_k = k\Delta t$, maka:

$$\{z_{k+1}\} = [A]\{z_k\} + [B]\{u_k\} \dots\dots\dots(4.7)$$

$$\{y_k\} = [C]\{z_k\} + [D]\{u_k\} \dots\dots\dots(4.8)$$

Dengan $[A]$ adalah matriks *state* diskrit, $[B]$ adalah matriks input diskrit, $[C]$ adalah matriks output diskrit, $[D]$ adalah matriks transmisi, $\{z_k\} = \{z(k\Delta t)\}$ adalah *state vector* waktu diskrit yang menghasilkan perpindahan dan kecepatan sampel, $\{u_k\}$ adalah input sampel, dan $\{y_k\}$ adalah output sampel. Hubungan antara matriks A, B, C, dan D dalam *continuos time* dan dalam *discreate time* (Rainieri dan Fabbrocino, 2011).

$$[A] = e^{[A_c]\Delta t} \dots\dots\dots(4.8a)$$

$$[B] = ([A] - [I])[A_c]^{-1}[B_c] \dots\dots\dots(4.8b)$$

$$[C] = [C_c] \dots\dots\dots(4.8c)$$

$$[D] = [D_c] \dots\dots\dots(4.8d)$$

Model *state space* pada waktu diskrit ditunjukkan pada persamaan 4.7 dan 4.8 merupakan model deterministik. Untuk menggambarkan data pengukuran

yang sebenarnya maka butuh komponen stokastik, dan karena itu perlu mengetahui proses *noise* $\{w_k\}$ dan pengukuran *noise* $\{v_k\}$. $\{w_k\}$ dan $\{v_k\}$ merupakan dua proses stokastik dan kombinasi waktu diskrit, sehingga model *state space* stokastik-deterministik diperoleh:

$$\{z_{k+1}\} = [A]\{z_k\} + [B]\{u_k\} + \{w_k\} \dots\dots\dots(4.9)$$

$$\{y_k\} = [C]\{z_k\} + [D]\{u_k\} + \{v_k\} \dots\dots\dots(5.0)$$

Proses *noise* $\{w_k\}$ disebabkan gangguan dan ketidakakuratan model, sedangkan *noise* $\{v_k\}$ dikarenakan ketidakakuratan sensor (Rainieri dan Fabbrocino, 2011). Untuk OMA *input* struktur tidak terbatas, $\{u_k\}$ tidak tersedia, oleh karena itu output sistem $\{y_k\}$ didapatkan dengan $\{w_k\}$ dan $\{v_k\}$, sehingga model stokastik *state space* waktu diskrit:

$$\{z_{k+1}\} = [A]\{z_k\} + \{w_k\} \dots\dots\dots(5.1)$$

$$\{y_k\} = [C]\{z_k\} + \{v_k\} \dots\dots\dots(5.2)$$

Tujuan dari metode SSI OMA adalah untuk mengukur sejumlah besar output $\{y_k\}$ agar dapat menemukan $[A]$ dan $[C]$. $\{w_k\}$ dan $\{v_k\}$ tak terbatas, tetapi diasumsikan sebagai proses *zero mean white noise* dengan matriks kovarians sebagai berikut:

jika $p = q$:

$$E \left[\begin{bmatrix} w_p \\ v_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_q^T & v_q^T \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} Q^{ww} \\ Z^{wv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{vw} \\ R^{vv} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(5.3)$$

Dan jika $p \neq q$ maka

$$E \left[\begin{bmatrix} w_p \\ v_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_q^T & v_q^T \end{bmatrix} \right] = [0] \dots\dots\dots(5.4)$$

Dimana p dan q adalah dua waktu instan yang berubah-ubah.

Dengan asumsi ini respon sistem dalam model *state space* juga diwakili oleh proses *zero mean Gaussian*. Kemudian output matriks kovarians ditentukan oleh persamaan:

$$\{R_i\} = E(\{y_{k+1}\}\{y_k\}^T) \dots\dots\dots(5.5)$$

State vector waktu diskrit $\{z_k\}$ juga merupakan proses *zero mean Gaussian* sehingga kovarian dari *state vector*:

$$[\Sigma] = E(\{z_k\}\{z_k\}^T) \dots\dots\dots(5.6)$$

dan $\{z_k\}$ tidak berkorelasi dengan $\{w_k\}$ dan $\{v_k\}$, maka

$$E(\{z_k\}\{w_k\}^T) = \{0\} \dots\dots\dots(5.7)$$

$$E(\{z_k\}\{v_k\}^T) = \{0\} \dots\dots\dots(5.8)$$

Realisasi diatas dimasukan ke dalam perhitungan manipulasi matematika sehingga menghasilkan (Rainieri dan Fabbrocino, 2011):

$$[\Sigma] = [A][\Sigma][A]^T + [Q^{ww}] \dots\dots\dots(5.9)$$

$$[R_0] = [C][\Sigma][C]^T + [R^{vv}] \dots\dots\dots(6.0)$$

$$[G] = [A][\Sigma][C]^T + [Z^{ww}] \dots\dots\dots(6.1)$$

$$[R_0] = [C][A]^{i-1}[G] \dots\dots\dots(6.2)$$

Dimana kovarians ouput matriks *state* $[G]$ ditentukan oleh persamaan:

$$[G] = E\left(\begin{Bmatrix} z_{k+1} \\ y_k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{k+1} \\ y_k \end{Bmatrix}^T\right) \dots\dots\dots(6.3)$$

2.2.3. Stochastic Subspace Identification (SSI)

Metode *Stochastic Subspace Identification* (SSI) adalah teknik identifikasi dengan melakukan analisis multivariate selama proses analisis modal menggunakan output-only data . Metode SSI diklasifikasikan menjadi *Covariance-Driven Stochastic Subspace Identification* (Cov-SSI) dan *Data-Driven Stochastic Subspace Identification* (DD-SSI). Algoritma DD-SSI sama dengan DD-SSI hanya DD-SSI menghindari perhitungan kovarians antara output. Metode Cov-SSI menghitung kovarians oleh *Fast Fourier Transform* (FFT) sedangkan pendekatan DD-SSI lebih cepat karena memanfaatkan faktorisasi QR (Ghalishooyan dan Shooshtari, 2015).

Metode SSI yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode analisis DD-SSI. Tujuan dari metode ini adalah menggunakan *output* pengukuran untuk mendapatkan $[A]$, $[C]$ dan $[G]$, sebagaimana yang telah diuraikan pada pada *state-space model* diatas. Proses analisis metode DD-SSI sebagai berikut:

2.2.3.1. Formulasi DD-SSI

a. Matriks Data Hankel

Input yang dibutuhkan untuk analisis DD-SSI adalah matriks data. Data ini dapat berupa data pengukuran perpindahan, kecepatan atau percepatan. Data matriks Y memiliki dimensi $l \times N$ di mana l adalah jumlah saluran pengukuran dan N adalah jumlah pengukuran. Waktu

antara setiap pengukuran adalah *time step*. Input terakhir adalah besarnya blok baris (*i*).

Pertama jumlah blok baris *i* ditetapkan sama dengan *x* kali ordo maksimum sistem (n_{maks}) dibagi dengan jumlah saluran pengukuran *l*:

$$i = x \frac{n_{maks}}{l} \dots\dots\dots(6.4)$$

Kemudian matriks Hankel dibangun. Jumlah kolom *j* dari matriks Hankel diasumsikan tak terhingga. Agar dapat dilakukan pembuktian statistik maka *j* harus besar. Dalam aplikasi praktis sudah diatur sebagai $N - 2i + l$ sehingga semua sampel data yang diberikan akan digunakan dalam pembuatan matriks Hankel.

$$j = N - 2i + l \dots\dots\dots(6.5)$$

Matriks Hankle dibuat langsung dari data yang diukur $Y(1:N)$:

$$[H_{0|2i-1}] = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} [y_0] & [y_1] & \dots & [y_{j-1}] \\ [y_1] & [y_2] & \dots & [y_j] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [y_{i-1}] & [y_i] & \dots & [y_{i+j-2}] \\ [y_i] & [y_{i+1}] & \dots & [y_{i+j-1}] \\ [y_{i+1}] & [y_{i+2}] & \dots & [y_{i+j}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [y_{2i+1}] & [y_{2i}] & \dots & [y_{2i+j-2}] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6.6)$$

b. Faktorisasi LQ

Kemudian dari matriks Hankel dilakukan faktorisasi LQ (Newland, 1996):

$$[H_{0|2i-1}] = [L][Q] \dots\dots\dots(6.7)$$

Yang berarti bahwa matriks Hankel dinyatakan sebagai hasil dari pengurangan matriks *triangular* $[L]$ dan matriks *ortonormal* $[Q]$ (Golub dan Van Loan, 1996):

$$[L] = \begin{matrix} & & l_i & l & l_{i-1} \\ & & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ l_i & \updownarrow & \left(\begin{matrix} [L_{11}] & [0] & [0] \\ [L_{21}] & [L_{22}] & [0] \\ [L_{31}] & [L_{32}] & [L_{33}] \end{matrix} \right) & & \end{matrix} \dots\dots\dots(6.8)$$

$$[Q] = \begin{matrix} & j \\ & \leftrightarrow \\ [Q] & = \begin{bmatrix} [Q_1] \\ [Q_2] \\ [Q_3] \end{bmatrix} \end{matrix} \dots\dots\dots(6.9)$$

c. *Dekomposisi*

Proyeksi $[P_i]$ dan $[P_{i-1}]$ dapat diperoleh dari dekomposisi matriks L dan Q

$$[P_i] = \begin{bmatrix} [L_{21}] \\ [L_{31}] \end{bmatrix} [Q_1]^T \dots\dots\dots(7.0)$$

$$[P_{i-1}] = [L_{31} \quad L_{32}] \begin{bmatrix} [Q_1]^T \\ [Q_2]^T \end{bmatrix} \dots\dots\dots(7.1)$$

$$[Y_{i_i}] = [L_{21} \quad L_{22}] \begin{bmatrix} [Q_1]^T \\ [Q_2]^T \end{bmatrix} \dots\dots\dots(7.3)$$

Dan akhirnya SVD dihitung dari $[P_i]$

$$[P_i] = [U][\Sigma][V]^T \dots\dots\dots(7.4)$$

d. *Kalman Filter*

Matriks $[P_i]$ difaktorisasi untuk mendapatkan matriks *observability*

$[O_i]$ dan *Kalman Filter State Sequence* $[\hat{S}_i]$.

$$[P_i] = [O_i][\hat{S}_i] \dots\dots\dots(7.5)$$

SVD dari $[P_i]$ sudah dihitung (persamaan 7.5) dan dapat digunakan untuk menghitung matriks *observability*:

$$[O_i] = [U][\Sigma]^{1/2}[I]^T \dots\dots\dots(7.6)$$

Dari persamaan 7.5 dapat dihitung:

$$[\hat{S}_i] = [O_i]^+ [P_i] \dots\dots\dots(7.7)$$

Dimana $[O_i]^+$ adalah *pseudo-inverse* dari $[O_i]$.

Faktorisasi dari $[P_{i-1}]$, seperti pada persamaan 7.5, maka:

$$[P_{i-1}] = [O_i^\uparrow][\hat{S}_i] \dots\dots\dots(7.8)$$

Dengan cara yang sama dengan persamaan 7.7 *kalman state sequence* dapat ditemukan:

$$[S_{i+1}] = [O_i^\uparrow]^+ [P_i] \dots\dots\dots(7.9)$$

Dimana $[O_i^\uparrow]^+$ diperoleh dari $[O_i]$ dengan menghapus l baris terakhir.

Menurut Van Overschee dan De Moor (1996), setelah $[\hat{S}_{i+1}]$, $[\hat{S}_i]$, dan $[Y_{i|i}]$

diperoleh maka dapat ditemukan estimasi *asymptotically unbiased least square* dari $[A]$ dan $[C]$:

$$\begin{bmatrix} [A] \\ [C] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{i+1} \\ Y_{ij} \end{bmatrix} [\hat{S}_i]^+ \dots\dots\dots(8.0)$$

2.2.3.2. Ekstraksi Parameter Modal

Setelah matriks *state* [A] dan matriks pengaruh output [C] diketahui, parameter modal dapat diekstraksi (Rainieri dan Fabbroconi, 2011). Penyelesaian masalah *eigenvalue* untuk [A] menghasilkan matriks diagonal [M] yang berisi *eigenvalue* μ dan *eigenvector* [Ψ] (Chopra, 2011):

$$[A] = [\Psi][M][\Psi]^{-1} \dots\dots\dots(8.1)$$

Modeshape sistem [Φ] diperoleh dari [Ψ] dan [C]:

$$[\Phi] = [C][\Psi] \dots\dots\dots(8.2)$$

Sisa dari parameter modal sistem diperoleh dari nilai *eigen* μ. Parameter modal ini ditemukan dalam matriks diagonal [M]. Untuk setiap mode, μ_m diperoleh dalam waktu diskrit dan perlu dikonversi ke *continuous time*.

$$\lambda_m = \frac{\ln(\mu_m)}{\Delta t} \dots\dots\dots(8.3)$$

λ_m mengandung *eigen value* pada setiap modus dalam *continuos time*.

Hal ini dapat digunakan untuk mencari frekuensi natural (ω_n), frekuensi modal teredam (ω_d) dan rasio redaman (ξ) untuk mode ke-r seperti yang ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$\omega_n = |\lambda_k| \dots\dots\dots(8.4)$$

$$\omega_d = \text{Im}(\lambda_k) \dots\dots\dots(8.5)$$

$$\xi = \frac{\text{Re}(\lambda_k)}{|\lambda_k|} \dots\dots\dots(8.6)$$

Ketika parameter modal telah ditemukan, proses pencarian matriks *state* dan parameter modal diulang untuk setiap ordo sampai n_{maks} , parameter diplot dalam diagram stabilisasi.

2.2.3.3. Diagram Stabilisasi

Untuk menemukan keselarasan perlu memisahkan pola stabil dari yang tidak stabil. Hal ini didasarkan pada perbandingan pola terkait untuk ordo model yang diberikan dengan yang diperoleh dari model satu ordo yang lebih rendah (Rainieri dan Fabbrocino, 2014).

Pola frekuensi natural dan rasio redaman dari dua ordo dibandingkan:

$$\frac{|f(n-1) - f(n)|}{|f(n-1)|} < x \dots\dots\dots(8.7)$$

$$\frac{|\xi(n-1) - \xi(n)|}{|f(n-1)|} < y \dots\dots\dots(8.8)$$

Hanya pola yang memenuhi kriteria stabilisasi didefinisikan oleh pengguna (x dan y) diberi label sebagai stabil. Ukuran ini tergantung pada beberapa faktor, di antaranya kompleksitas struktur dan akurasi pengukuran. Untuk frekuensi alami nilainya harus sangat tepat dan harus digunakan persyaratan stabilitas rendah. Namun untuk nilai rasio redaman dapat lebih bervariasi. Khusus untuk mode teredam ringan dimana persentase variasinya bisa relatif besar. Nilai awalnya harus dipilih yang relatif kecil dan kemudian meningkat jika diperlukan. Dalam penelitian ini digunakan nilai x dan y sebesar 1% dan 5%.