

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Metode Kekakuan

Dengan perkembangan yang pesat dalam bidang komputer, menyebabkan analisis struktur yang mendasarkan hitungan dengan metoda matriks kekakuan menjadi populer dan cocok dilakukan dengan bantuan komputer. Hal ini dikarenakan langkah-langkah analisis pada metoda matriks kekakuan sangat sistematis dan terpolat sehingga mudah diprogram dengan komputer. Dengan demikian analisis struktur yang kompleks dapat dilakukan dengan mudah dan cepat. Secara umum langkah hitungan pada metoda matriks kekakuan dapat dilakukan sebagai berikut ini:

1. Bentuk matriks kekakuan elemen dan gaya ujung jepit,
2. Bentuk matriks kekakuan dalam koordinat global,
3. Selesaikan persamaan linier simultan untuk mencari perindahan,
4. Gaya-gaya batang dapat dihitung.

Permasalahan pada metoda kekakuan langsung didasarkan pada hubungan antar variabel sebagai berikut:

1. Hubungan antara deformasi batang dan perpindahan titik-kumpul (*compatibility* atau kesepadanan),
2. Hubungan antara deformasi batang dan gaya-gaya dalam (*constitutive equation*),

### 3. Hubungan antara beban luar dan gaya gaya dalam (Arfiadi, 2003).

#### 2.2 Metode Fleksibilitas

Analisa struktur dengan metode matrik dikenal dua cara, yakni metode kekakuan (*stiffness method*) dan metode fleksibilitas (*flexibility method*). Bila metode kekakuan selalu mengambil lendutan pada titik bebas dari suatu konstruksi sebagai besaran yang harus dicari, maka metode fleksibilitas sebaliknya mengambil gaya sebagai besaran yang harus dicari (hal ini akan jelas terlihat pada penggunaan metode fleksibilitas untuk analisa konstruksi statis tidak tertentu).

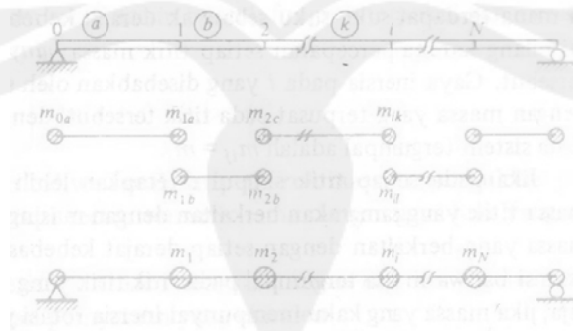
Metode fleksibilitas sebenarnya sudah dikenal sejak tahun 1886, dan dikenal sebagai metode gaya (*force method*), sesuai dengan besaran yang akan dicari dalam proses analisa. Dengan dikembangkannya komputer, maka metode ini menjadi berkembang pesat sesuai dengan kebutuhan. Berhubung dengan hakekat dari metode fleksibilitas ini, maka analisa akan dimulai dengan kesetimbangan gaya. Oleh karenanya struktur dasar dari cara analisa ini ialah suatu konstruksi yang statis tertentu. Tahapan-tahapan yang mendasari cara analisa ialah :

1. Kesetimbangan gaya luar dan gaya dalam.
2. Hubungan antara gaya dalam dan deformasi elemen struktur.
3. Kontinuitas dari deformasi atau kompatibiliti (Supartono dan Boen, 1981).

## 2.3 Matrik Massa Terpusat dan Matrik Massa Sepadan

### 2.3.1 Matrik Massa Terpusat

Prosedur yang paling sederhana untuk menetapkan sifat massa setiap struktur adalah dengan mengasumsikan bahwa seluruh massa terpusat pada titik di mana perpindahan translasi ditetapkan. Prosedur yang lazim digunakan untuk menetapkan massa titik yang ditempatkan pada masing-masing simpul adalah dengan mengasumsikan bahwa struktur dibagi menjadi segmen-segmen, dan simpul berlaku sebagai titik-titik. Gambar 2.1 menunjukkan prosedur untuk suatu struktur tipe balok. Massa masing-masing segmen dianggap terpusat pada massa-massa titik pada masing-masing simpulnya, distribusi massa-segmen pada titik-titik ini akan ditentukan menurut statika. Massa total yang terpusat pada setiap simpul dari struktur yang lengkap adalah jumlah kontribusi simpul dari semua segmen yang terpasang pada simpul tersebut. Pada sistem balok Gambar 2.1, terdapat dua segmen yang berkontribusi terhadap masing-masing simpul; yaitu,

$$m_1 = m_{1a} + m_{1b}$$


Gambar 2.1 Pengumpulan Massa pada Simpul Balok

(Sumber: *Clough and Panzani, 1997*)

Untuk sistem yang hanya derajat kebebasan translasinya yang ditetapkan, matriks massa tergroupal mempunyai bentuk diagonal; untuk sistem Gambar 2.1 akan dituliskan:

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

di mana terdapat suku-suku sebanyak derajat kebebasan. Suku  $m_{ij}$  di luar diagonal matrik ini hilang karena percepatan setiap titik massa hanya menimbulkan gaya inersia pada titik tersebut. Gaya inersia pada  $i$  yang disebabkan oleh satu satuan percepatan titik  $i$  jelas sama dengan massa yang terpusat pada titik tersebut; dengan demikian koefisien pengaruh massa pada sistem tergroupal adalah  $m_{ij} = m_i$ .

Jika pada setiap titik simpul ditetapkan lebih dari satu derajat kebebasan translasi massa titik yang sama akan berkaitan dengan masing-masing derajat kebebasan. Sebaliknya massa yang berkaitan dengan setiap derajat kebebasan rotasi akan menjadi nol oleh karena asumsi bahwa massa tergroupal pada titik-titik yang tidak mempunyai inersia rotasi. (Tentu saja, jika massa yang kaku mempunyai inersia rotasi yang terhingga dikaitkan dengan derajat kebebasan rotasi, koefisien massa diagonal untuk derajat kebebasan tersebut akan merupakan inersia rotasi massa). Jadi matriks massa tergroupal pada umumnya adalah

matriks diagonal yang akan mencakup elemen diagonal nol untuk derajat kebebasan rotasi (Clough dan Panzien, 1997).

### 2.3.2 Matrik Massa Sepadan

Matriks massa konsisten diperoleh dengan mengenakan satu satuan percepatan terhadap masing-masing derajat kebebasan dalam urutan yang membatasi massa lainnya dan kemudian menentukan gaya-gaya inersia. Analisis dinamik sistem massa yang konsisten umumnya membutuhkan usaha perhitungan yang jauh lebih besar daripada yang dibutuhkan untuk sistem massa tergumpal, karena dua hal: (1) matriks massa tergumpal adalah matriks diagonal, sedangkan matriks konsisten mempunyai banyak suku di luar diagonal (menghasilkan apa yang disebut dengan massa saling bergantung); (2) derajat kebebasan rotasi dapat dieliminasi melalui analisis massa tergumpal, sedangkan semua derajat kebebasan rotasi dan translasi harus termasuk dalam analisis massa konsisten (Clough dan Panzien, 1997).

## 2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

### 2.4.1 Nilai Eigen

Banyak persoalan rekayasa yang membawa ke persoalan matematik berbentuk suatu himpunan persamaan simultan yang dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$AX = \lambda X \quad (2-2)$$

dengan A matriks bujursangkar, X vektor besaran anu dan  $\lambda$  besaran skalar. Persamaan (2-2) menyatakan soal nilai eigen, di mana solusi dan

persamaan simultan ini adalah suatu vektor  $X$  yang jika dikalikan oleh  $A$ , hasilnya adalah sama dengan perkalian suatu skalar  $\lambda$  dengan  $X$  sendiri. Persamaan (2-2) dapat ditulis ulang sebagai suatu persamaan homogen:

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad (2-3)$$

dengan  $I$  matriks identitas yang berordo sama dengan matriks  $A$ . Jika Persamaan (2-3) ini ditulis dalam bentuk lengkap, maka persamaan itu akan menjadi:

$$\begin{aligned} (A_{11} - \lambda)X_1 + A_{12}X_2 + \dots + A_{1n}X_n &= 0 \\ A_{21}X_1 + (A_{22} - \lambda)X_2 + \dots + A_{2n}X_n &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ A_{n1}X_1 + A_{n2}X_2 + \dots + (A_{nn} - \lambda)X_n &= 0 \end{aligned} \quad (2-4)$$

Karena persamaan (2-4) homogen, maka persamaan ini konsisten dan selalu mempunyai solusi trivial ( $X=0$ ). Tetapi yang lebih penting dan menarik adalah solusi non trivialnya; solusi non trivial ini hanya ada jika determinan dari matriks koefisien adalah nol. Jadi, didapat persamaan di bawah ini:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2-5)$$

Persamaan (2-5) ini menyatakan syarat yang diminta agar sistem persamaan di atas mempunyai solusi non trivial, dan persamaan ini disebut persamaan karakteristik. Biasanya koefisien-koefisien  $A_{ij}$  dari matriks  $A$  diketahui, dan Persamaan (2-5) mengandung arti untuk menentukan: nilai  $\lambda$  agar

solusi non trivial ada. Nilai  $\lambda$  seperti ini dinamakan nilai eigen, dan solusi untuk  $X$  yang berkaitan dengan nilai eigen ini disebut vektor eigen (Gere dan Weaver, 1987).

#### 2.4.2 Vektor Eigen

Setelah nilai eigen suatu matriks ditemukan, maka vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen tersebut dapat diperoleh dengan menyelesaikan himpunan persamaan homogen yang sesuai (lihat Persamaan 2-3 dan 2-4). Berkaitan dengan tiap nilai eigen  $\lambda_i$  yang berbeda, akan terdapat vektor-eigen  $X_i$  yang tak nol. Vektor eigen merupakan solusi dari persamaan homogen yang dapat diperoleh dengan memasukkan nilai  $\lambda_i$  ke dalam Persamaan (2-3) sebagai berikut:

$$(A - \lambda_i) X_i = 0 \quad (2-6)$$

(Gere dan Weaver, 1987)

#### 2.5 Dekomposisi Nilai Singular (SVD)

Dekomposisi nilai singular atau *singular value decomposition* (SVD) merupakan salah satu teknik pemfaktoran matriks, baik untuk entry real atau kompleks. Dekomposisi biasanya dilakukan untuk matriks  $A_{n \times n}$ , tetapi SVD dapat digunakan pada matriks  $A_{m \times n}$ .

Jika  $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ , dengan  $a_{ij} \in C$  maka  $A_{m \times n} = U_{m \times m} S_{m \times n} V_{n \times n}^H$  dengan  $U_{m \times m}$  dan  $V_{n \times n}$  matriks uniter dan  $S_{m \times n}$  matriks segitiga. Matriks uniter  $U_{m \times m}$  dan  $V_{n \times n}$  dibangun dari matriks vektor eigen  $A^H A$  dan  $AA^H$ . Sedangkan matriks  $S_{m \times n}$  adalah matriks segitiga dengan entry pada diagonal utamanya adalah

akar nilai eigen ( $\sigma = \sqrt{\lambda_i}$ ) positif dari matriks  $A^H A$  yang disebut dengan nilai singular (Priastuti, 2008).

## 2.6 Getaran Bebas Tanpa Redaman

Sistem yang bergetar bebas tanpa redaman merupakan hal penting dalam analisis dinamik. Dalam hal ini persamaan gerak menjadi:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = 0 \quad (2-7)$$

Hal ini berkaitan dengan sifat yang unik dari setiap struktur. Jika struktur bergetar bebas tanpa redaman maka suatu saat terjadi suatu pola atau ragam getaran tertentu dari bentuk perpindahan lantai-lantai. sehingga perpindahan dapat ditulis sebagai

$$U = \varphi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (2-8)$$

Selanjutnya dengan menurunkan pers. (2-8) dua kali diperoleh

$$\dot{U} = \omega_i \varphi_i \cos(\omega_i t + \alpha_i) \quad (2-9)$$

$$\ddot{U} = -\omega_i^2 \varphi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) = -\omega_i^2 U \quad (2-10)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2-10) dan (2-8) pada persamaan (2-9) menghasilkan

$$-M \omega_i^2 \varphi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) + K \varphi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) = 0$$

$$(K - \omega_i^2 M) \varphi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) = 0$$

atau

$$(K - \omega_i^2 M) \varphi_i = 0 \quad (2-11)$$

Persamaan (2-11) adalah persamaan simultan homogen karena di sebelah kanan tanda sama dengan nilainya nol. Persamaan ini dikenal sebagai permasalahan



eigenvalue. Jika persamaan ini diselesaikan, nilai  $\varphi_i$  tidak dapat kita dapatkan. Untuk itu biasanya dinormalisasi misalnya dengan mengambil nilai relatif dari elemen  $\varphi_i$ . Dalam hal ini  $\varphi_i$  merupakan vektor bentuk ragam (*mode shape*) atau *eigenvector* struktur, jika bergetar bebas dengan frekuensi sudut alami sebesar  $\omega_i$ . Nilai waktu getar alami untuk ragam yang ke- $i$ , tentunya juga dapat diperoleh dengan

$$T = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad (2-12)$$

Untuk sistem yang mempunyai N-derajat kebebasan. mempunyai sejumlah N ragam getaran  $\varphi_i$  sampai dengan  $\varphi_N$  yang masing-masing bergetar dengan frekuensi lingkaran alami  $\omega_i$  sampai dengan  $\omega_N$  (atau T, sampai dengan  $T_N$ ). Jadi

$$\omega_1 \text{ dan pasangannya } \varphi_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{N1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{N1} \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 \text{ dan pasangannya } \varphi_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \vdots \\ \varphi_{N2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \vdots \\ \varphi_{N2} \end{Bmatrix}, \text{ dan seterusnya.}$$

Vektor bentuk ragam  $\varphi = \{\varphi\}$  jika di kelompokkan menjadi matriks bentuk ragam  $\Phi$ , yaitu

$$\Phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_N] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1N} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \varphi_{N2} & \dots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

Persamaan (2-11) dengan mengambil determinan dari  $(K - \omega_i^2 M)$  sama dengan nol atau

$$|K - \omega_i^2 M| = 0 \quad (2-13)$$

Dari persamaan (2-13) akan diperoleh nilai-nilai  $\omega_i$  yang selanjutnya jika disubstitusikan pada pers. (2-11) akan diperoleh nilai-nilai ragam getaran  $\{\phi\}_i$  setelah sebelumnya dilakukan normalisasi (Arfiadi, 2003).

## **2.7 Deteksi Kerusakan Struktur**

Salah satu usaha pemeliharaan infrastruktur teknik sipil adalah dengan melakukan deteksi kerusakan pada infrastruktur tersebut. Hasil analisis yang obyektif dan lebih efektif dalam analisis telah lama menjadi topik yang menarik dibicarakan para ahli. Untuk mencapai tujuan ini, telah dilakukan berbagai pengembangan metode yang dapat digunakan untuk melakukan deteksi tersebut.

Implementasi pertama pengamatan kesehatan struktur (*structure health monitoring*) dilakukan terhadap struktur yang dibangun di lepas pantai dan jembatan. Satu jenis metode identifikasi kerusakan digunakan untuk mengukur perubahan frekuensi yang kemudian digunakan untuk menentukan kerusakan struktural. Vandiver (1975) memeriksa perubahan frekuensi resonansi akibat kerusakan pada elemen struktur. Cha dan Tuck-lee memeriksa perubahan data respon frekuensi. Informasi ini kemudian digunakan untuk memperbarui parameter struktural. Teknik lain yang dikembangkan adalah dengan menganalisis data dari perubahan dalam matiks fleksibilitas yang telah di ukur. Pandey dan Biswas (1994, 1995) memperkenalkan deteksi kerusakan dengan metode penentuan lokasi kerusakan berdasarkan perubahan fleksibilitas dalam struktur. Bernal (2002a) memperkenalkan satu set vektor beban dari perubahan fleksibilitas

matriks, vektor ini kemudian digunakan sebagai vektor beban penentu lokasi kerusakan (Gao, 2002).

## 2.8 Motivasi Berdasarkan Pendekatan Fleksibilitas

Ditinjau persamaan gerak

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2-14)$$

dengan  $\mathbf{M}$  = massa,  $\mathbf{C}$  = redaman,  $\mathbf{K}$  = kekakuan,  $\mathbf{F}$  = vektor beban.

Dengan analisis ragam dan sifat-sifat orthogonalitas bentuk ragam selanjutnya dapat diperoleh

$$\mathbf{M}^* = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} \quad (2-15a)$$

dan

$$\mathbf{K}^* = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi} \quad (2-15b)$$

dengan  $\boldsymbol{\phi}$  = bentuk ragam dengan sembarang normalisasi.

Selanjutnya dari sifat-sifat getaran bebas dapat diperoleh

$$\mathbf{K}^* - \omega^2 \mathbf{M}^* = 0 \quad (2-16)$$

atau

$$\omega^2 = \lambda = \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{K}^* \quad (2-17)$$

Dengan mengkombinasikan pers. (2-17) dan (2-15) diperoleh

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \lambda = 0 \quad (2-18)$$

Definisikan

$$\mathbf{v} = (\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi})^{1/2} = \mathbf{M}^{1/2} \quad (2-19)$$

di mana  $\mathbf{v}$  adalah matriks diagonal dengan indeks massa ternormalisasi pada diagonal utamanya.

Dengan mensubstitusikan persamaan (2-19) pada persamaan (2-18) diperoleh

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{v}^2 \lambda = 0$$

atau

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}^T \lambda \mathbf{v} \quad (2-20)$$

Dari persamaan (2-20) matriks kekakuan dapat diperoleh dari

$$\mathbf{K} = (\boldsymbol{\varphi}^T)^{-1} \mathbf{v}^T \lambda \mathbf{v} \boldsymbol{\varphi}^{-1} \quad (2-21)$$

Dari persamaan (2-19) diperoleh

$$(\mathbf{v}^{-2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I} \text{ dan } \boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}^{-2}) = \mathbf{I} \quad (2-22)$$

sehingga

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1} = (\mathbf{v}^{-2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M}) \text{ dan } (\boldsymbol{\varphi}^T)^{-1} = (\mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}^{-2}) \quad (2-23)$$

Dengan menggunakan persamaan (2-23), persamaan (2-21) sekarang menjadi

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}^{-1} \lambda \mathbf{v}^{-1} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \quad (2-24)$$

Karena hubungan antara matriks kekakuan dan matriks fleksibilitas, matriks fleksibilitas dapat diperoleh dari persamaan (2-24) sebagai

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\phi} \mathbf{v}^{-1}) \boldsymbol{\lambda}^{-1} (\boldsymbol{\phi} \mathbf{v}^{-1})^T \quad (2-25)$$

dari persamaan (2-24) dan (2-25) tampak pengaruh setiap ragam frekuensi pada matriks kekakuan dan fleksibilitas. Pengaruh ragam ke  $j$  pada matriks kekakuan bertambah sebanding dengan pertambahan kuadrat frekuensi ragam ke  $j$  ( $=\omega_j^2$ ). Sedangkan pengaruh ragam ke  $j$  berkurang sebanding dengan kuadrat frekuensi ke- $j$  ( $=\omega_j^{-2}$ ). Hal ini menunjukkan bahwa matriks kekakuan sensitif terhadap frekuensi ragam yang lebih tinggi, sedangkan matriks fleksibilitas tidak begitu sensitif. Kenyataan ini menunjukkan bahwa identifikasi matriks fleksibilitas akan lebih menguntungkan dibandingkan matriks kekakuan sebab ragam-ragam yang lebih tinggi biasanya sulit dideteksi dalam percobaan di lapangan (Arfiadi dan Wibowo, 2005).

## **2.9 Vektor Beban Penentu Lokasi Kerusakan**

Bernal (2002) mengajukan metoda untuk mendeteksi lokasi kerusakan elemen struktur berdasarkan matriks fleksibilitas. Dalam metoda ini ditentukan suatu himpunan konfigurasi beban sebagai *damage locating vector* (vektor penentu lokasi kerusakan). Vektor beban ini mempunyai sifat jika beban-beban ini dikerjakan sebagai beban statik pada lokasi sensor yang digunakan untuk pengukuran, maka tegangan pada elemen yang rusak sama dengan nol. Karena biasanya terjadi kesalahan dalam pengukuran (*noise*) dan

kesalahan dalam hitungan, nilai ini biasanya tidak persis sama dengan nol tetapi nilainya sangat kecil. Dengan cara ini maka lokasi kerusakan dapat diketahui.

Jika matriks fleksibilitas pada lokasi sensor pada kondisi tidak rusak dan rusak dapat ditentukan dan dinyatakan berturut-turut dengan  $F_u$  dan  $F_d$  dan vektor beban yang dinyatakan dengan  $L$  memenuhi persamaan

$$F_u L = F_d L \quad (2-26a)$$

atau

$$F_\Delta L = (F_d - F_u) L = 0 \quad (2-26b)$$

maka berarti vektor beban  $L$  menghasilkan perpindahan yang sama pada lokasi sensor pada kondisi sebelum dan sesudah rusak, Karena vektor beban penentu lokasi kerusakan (VBPLK) tidak menghasilkan tegangan pada elemen yang rusak, maka kerusakan elemen tersebut tidak mempengaruhi perpindahan pada tempat yang diukur. Dengan demikian vektor beban  $L$  merupakan VBPLK (Arfiadi dan Wibowo, 2005).

### **2.10 Menentukan Vektor Beban Penentu Lokasi Kerusakan**

Untuk menentukan vektor beban penentu kerusakan  $L$  dapat dilakukan sebagai berikut ini. Perbedaan dari matriks fleksibilitas dari kondisi tidak rusak dan rusak dapat dinyatakan dalam *singular value decomposition* (SVD) sebagai

$$\mathbf{F}_\Delta = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \quad (2-27)$$

atau

$$\mathbf{F}_\Delta = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_0]^T \quad (2-28)$$

Dengan mengingat sifat SVD

$$[\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_0]^T [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_0] = \mathbf{I} \quad (2-29)$$

persamaan (2-28) dapat ditulis menjadi

$$[\mathbf{F}_\Delta \mathbf{V}_1 \quad \mathbf{F}_\Delta \mathbf{V}_0] = [\mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{0}] \quad (2-30)$$

sehingga

$$\mathbf{F}_\Delta \mathbf{V}_0 = \mathbf{0} \quad (2-31)$$

Dengan membandingkan persamaan (2-31) dan (2-26) tampak bahwa  $\mathbf{L} = \mathbf{V}_0$ . Jadi vektor beban penentu kerusakan dapat diperoleh dari SVD perbedaan matriks fleksibilitasnya.

Namun karena adanya ketidak-akuratan data karena kesalahan dalam pengukuran dan hitungan matriks fleksibilitas maka *singular value* yang berhubungan dengan  $\mathbf{V}_0$  tidak tepat sama dengan nol. Dengan demikian perlu ditentukan cara untuk menentukan vektor beban penentu kerusakan dari hasil hitungan SVD ini. Bernal (2002) mengusulkan untuk menggunakan index *svn* sebagai berikut

$$svn_i = \sqrt{\frac{S_i C_i^2}{\max(S_k C_k^2)}} \quad (2-32)$$

dengan  $s_i$  = singular value yang ke- $i$  dari matriks  $F_{\Delta}$ ,  $c_i$  = konstanta untuk normalisasi tegangan maksimum pada elemen struktur yang disebabkan oleh beban  $c_i V_i$  sehingga bernilai sama dengan satu, dan  $V_i$  = right singular vector dari matriks  $F_{\Delta}$ . Menurut Bernal (2002) nilai  $svn \leq 0,20$  menunjukkan bahwa beban merupakan VBPLK (Arfiadi dan Wibowo, 2005).

### 2.11 Normalisasi Tegangan Kumulatif

Setiap VBPLK yang diperoleh, dikerjakan pada model struktur yang tidak rusak. Tegangan pada setiap elemen struktur dapat diperoleh yang kemudian dapat dihitung tegangan kumulatif ternormalisasinya (*normalized cumulative stress*). Jika elemen mempunyai nilai tegangan kumulatif ternormalisasi sama dengan atau mendekati nol, maka elemen ini merupakan kandidat elemen yang rusak. Tegangan kumulatif ternormalisasi dapat ditentukan berdasarkan (Gao, 2005)

$$\bar{\sigma}_j = \frac{\sigma_j}{\max(\sigma_k)} \quad (2-33)$$

dengan

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^m \text{abs} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\max(\sigma_{ik})} \right) \quad (2-34)$$

dengan  $\sigma_j$  = tegangan kumulatif pada elemen ke- $j$ ,  $\sigma_{ij}$  = tegangan pada elemen ke- $j$  yang disebabkan oleh VBPLK ke- $i$ ,  $m$  = jumlah VBPLK (Arfiadi, 2005).



## 2.12 Langkah Deteksi

Dari uraian di atas, langkah untuk mendeteksi kerusakan pada struktur dapat dilakukan sebagai berikut ini.

1. Ambil  $V_i$  dari  $V$ .
2. Hitung tegangan pada struktur yang tidak rusak akibat  $V_i$ .
3. Tentukan konstanta  $c_i$ .
4. Hitung indeks  $s_{vni}$  dan tentukan vektor beban yang memenuhi  $s_{vni} \leq 0,20$
5. Tentukan lokasi elemen yang rusak dari tegangan kumulatif ternormalisasinya (Arfiadi dan Wibowo, 2005).

Kerusakan pada komponen struktur, dapat membahayakan stabilitas suatu bangunan. Hal ini tentu membahayakan keselamatan pengguna bangunan. Oleh karena itu, salah satu usaha yang harus dilakukan adalah pemeliharaan bangunan (*structural health monitoring*). Pemeliharaan struktur dapat dilakukan dengan berbagai cara, salah satunya adalah dengan melakukan deteksi kerusakan secara lebih dini. Salah satu metode deteksi kerusakan adalah dengan menggunakan satu set vektor beban dari perubahan fleksibilitas matriks yang diperkenalkan oleh Bernal (2002). Jika suatu beban yang telah ditentukan (vektor beban penentu lokasi kerusakan) dikerjakan sebagai beban statik pada lokasi sensor yang digunakan untuk pengukuran, maka tegangan pada elemen yang rusak adalah sama dengan nol. Karena biasanya terjadi kesalahan dalam pengukuran dan kesalahan dalam hitungan, nilai ini biasanya tidak persis sama dengan nol tetapi nilainya sangat kecil. Dengan cara ini maka lokasi kerusakan dapat dideteksi.