Albertus Joko Santoso
Zeny Ernaningsih
Ika Murti Kristiyani
Alexis Divasonda Sigat Ngaing
Christopher Hartono

ALJABAR LINIER

ALJABAR LINIER

Albertus Joko Santoso
Zeny Ernaningsih
Ika Murti Kristiyani
Alexis Divasonda Sigat Ngaing
Christopher Hartono

Universitas Atma Jaya Yogyakarta

ALJABAR LINIER

Oleh : Albertus Joko Santoso
Zeny Ernaningsih
Ika Murti Kristiyani
Alexis Divasonda Sigat Ngaing
Christopher Hartono

Cetakan ke-	05	04	03	02	01
Tahun	28	27	26	25	24

Diterbitkan oleh
UNIVERSITAS ATMA JAYA YOGYAKARTA
Jl. Babarsari No. 5-6 Yogyakarta 55281
Telp. +62 274 487711
E-mail: lib.publisher@uajy.ac.id

ISBN: 978-623-10-2784-9 (PDF)

ALJABAR LINIER

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas selesainya penulisan buku Aljabar Linier ini. Buku ini disusun untuk mendukung mata kuliah Aljabar Linier pada Program Sarjana Matematika, Informatika, Teknik Industri, serta beberapa Program Studi yang membutuhkan keterampilan serta pemahaman berkaitan dengan aljabar matriks dan vektor serta komputasi. Buku ini terdiri dari 8 bab dan membahas tentang Sistem Persamaan Linier, Matriks, Determinan dan Invers, Penyelesaian Sistem Persamaan Linier, Ruang Vektor Euclidean, Ruang Vektor Umum, Transformasi Linier, Nilai Eigen dan Vektor Eigen.

Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi Dosen, Mahasiswa, maupun para Praktisi yang ingin memperdalam pengetahuannya tentang Aljabar Linier.

Penulis

Daftar Isi

Bab I
SISTEM PERSAMAAN LINIER

1.1. PENGERTIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

Secara umum kita mendefinisikan ***persamaan linier*** dengan n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

dimana $a_1, a_2, \dots, a_1$ dan b merupakan konstanta real. Variabel – variabel dalam persamaan linier seringkali disebut sebagai faktor-faktor yang tidak diketahui.

Dalam persamaan linier, seluruh variabel yang ada dalam bentuk pangkat pertama dan bukan argumen dari fungsi trigonometri, logaritma maupun eksponensial.

Berikut contoh persamaan linier :

$$2x + y = 8, \quad y = \frac{1}{2}x + 3z + 1, \quad \text{dan} \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$

Sedangkan berikut contoh *bukan* persamaan linier :

$$x + 3\sqrt{y} = 7, \quad 3x + 2y - z + xz = 4, \text{ dan } \quad y = \sin x$$

Latihan Soal 1.1

Manakah di bawah ini yang merupakan persamaan linier?

1. $x + 3y = 7$
2. $\sin x + y = 0$
3. $\frac{1}{2} x - y + 3z = -1$
4. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$
5. $(x_1)^{1/2} + 2x_2 + x_3 = 1$
6. $2x + 4\sqrt{z} = 8$

Himpunan persamaan linier dalam jumlah tertentu dengan beberapa variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut ***sistem persamaan linier*** atau sistem linier. Sebarang sistem *m* persamaan linier dengan *n* faktor yang tidak diketahui dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah peubah dan subskrip a dan b menyatakan konstanta.

Berikut adalah contoh – contoh sistem linier :

a. $2x_1 + 3x_1 = 7$
$-3x_1 + 5x_1 = -1$

b. $x_1 - 3x_1 + 4x_3 = 1$
$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$

1.2. JENIS DAN GRAFIK SISTEM PERSAMAAN LINIER

Sistem persamaan linier dapat dibedakan menjadi beberapa jenis :

1. Berdasarkan konstanta (sebelah kanan)
   a. Sistem Persamaan Linier Homogen

      Sistem persamaan linier homogen adalah sistem persamaan linier yang semua suku konstannya nol sehingga bentuk umum sistem persamaan linier homogen ini sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

b. Sistem Persamaan Linier Non Homogen

Sistem persamaan linier non homogen adalah sistem persamaan linier disebut non homogen jika mempunyai konstanta (sebelah kanan, $b \neq 0$) yang tidak sama dengan nol. Bentuk umum sistem persamaan linier non homogen ini sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

2. Berdasarkan solusi

Sistem persamaan linier dapat dibedakan berdasarkan solusi penyelesaiannya :

a. Sistem Persamaaan Linier yang konsisten.

Suatu persamaan linier disebut konsisten jika paling tidak mempunyai satu solusi.

i. mempunyai solusi tunggal

ii. mempunyai solusi tak hingga banyak

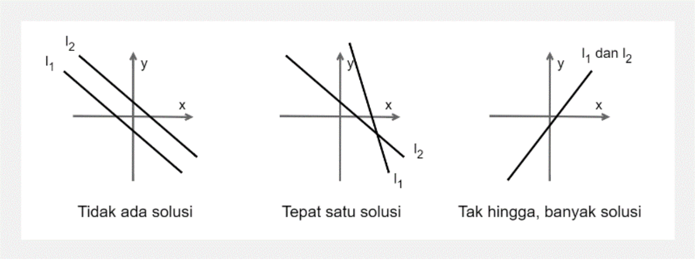
b. Sistem Persamaan Linier yang tidak konsisten

Suatu sistem persamaan linier disebut tidak konsisten jika tidak memiliki solusi.

Jika suatu sistem umum dari dua persamaan dengan dua variabel x dan y tidak diketahui sebagai berikut :

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (a_1, b_1 \text{ tidak keduanya nol})$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (a_2, b_2 \text{ tidak keduanya nol})$$

Setiap solusi (x, y) dari sistem linier di atas berhubungan dengan titik perpotongan dari dua garis. Ada 3 kemungkinan penyelesaian yaitu: mempunyai solusi tunggal, mempunyai solusi tak hingga banyak, atau tidak mempunyai solusi. Contoh dari penyelesaian Sistem Persamaan Liniear dua dimensi dapat dilihat pada gambar 1.2.1.

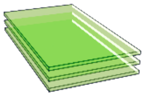


Gambar 1.2.1. Kemungkinan penyelesaian Sistem Persamaan Linier dua dimensi

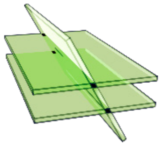
Jika suatu sistem umum dari tiga persamaan dengan tiga variabel x, y dan z tidak diketahui sebagai berikut :

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \;\; (a_1, b_1, c_1 \text{ tidak keduanya nol})$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \; (a_2, b_2\,, c_2 \text{ tidak keduanya nol})$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \; (a_3, b_3\,, c_3 \text{ tidak keduanya nol})$$

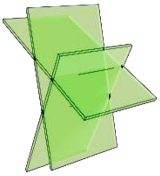
Sistem persamaan linier tersebut juga mempunyai 3 kemungkinan penyelesaian yaitu: tidak punya solusi, mempunyai solusi tunggal, atau mempunyai solusi tak hingga banyak. Contoh dari penyelesaian Sistem Persamaan Linier tiga dimensi dapat dilihat pada gambar 1.2.2.



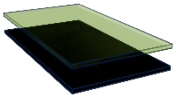
Tidak punya solusi (bidang berjajar, tetapi tidak berpotongan)



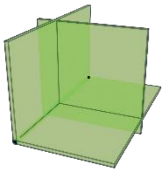
Tidak punya solusi (ada dua bidang sejajar)



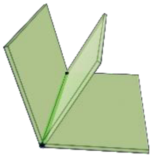
Tidak punya solusi (tidak ada perpotongan sama)



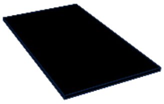
Tidak punya solusi (2 bidang berhimpit satu sama lain)



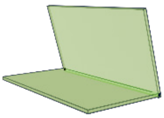
Punya solusi tunggal (perpotongan berjenis titik)



Punya solusi tak hingga (perpotongan berbentuk garis)



Punya solusi tak hingga (ketiga bidang berhimpit, solusi berbentuk bidang)



Punya solusi tak hingga (perpotongan berbentuk garis)

Gambar 1.2.2. Kemungkinan penyelesaian Sistem Persamaan Linier tiga dimensi

Latihan Soal 1.2

1. Berikan contoh SPL dari 2 persamaan dengan 2 variabel yang:
   a. mempunyai solusi tunggal
   b. mempunyai solusi tak hingga banyak
   c. tidak mempunyai solusi
2. Temukan solusi dari sistem persamaan linier berikut?
   a. $x - y + 2z = 5$
   $2x - 2y + 4z = 10$
   $3x - 3y + 6z = 15$
   b. $4x - 2y - 6z = 0$
   $-2x + 4y - 6z = 0$
   $2x + y + 4z = 0$
   c. $4x_1 - 6x_2 = -4$
   $4x_1 + 2x_2 = 2$
   $6x_1 + 4x_2 = 2$
3. Tentukan apakah sistem linier homogen di bawah ini memiliki solusi non trivial?
   a. $6x_1 - 4x_2 = 0$
   $12x_1 - 8x_2 = 0$
   b. $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$
   $2x_2 - 16x_3 = 0$
   $8x_3 = 0$
4. Selesaikan sistem linier berikut dimana a,b, dan c adalah konstanta
   a. $4x_1 + 2x_2 = a$
   $6x_1 + 12x_2 = b$
   b. $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = a$
   $4x_1 + 4x_3 = b$
   $6x_2 + 6x_3 = c$
5. Tentukan nilai a dari sistem linier di bawah ini yang mana sistemnya tidak mempunyai solusi, mempunyai solusi tunggal, atau mempunyai solusi tak hingga.

$$2x + 4y - 6z = 8$$
$$6x - 2y + 10z = 4$$
$$8x + 2y + (2a^2 - 28)z = 2a + 4$$

1.3. SISTEM PERSAMAAN LINIER DALAM MATRIKS

Dari materi 1.1 kita dapat mengetahui bahwa bentuk umum sistem persamaan linier sebagai berikut :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Sistem persamaan linier tersebut dapat diubah menjadi bentuk matriks sebagai berikut :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matriks koefisien}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{Matriks variabel}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\text{Matriks konstanta}}$$

Latihan Soal 1.3

1. Tuliskan sistem persamaan linier berikut dalam matriks

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$
$$2x_1 - 3x_2 = 5$$

2. Tuliskan sistem persamaan linier berikut dalam matriks

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 6$$
$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7$$

3. Tuliskan sistem persamaan linier berikut dalam matriks

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

4. Tuliskan masing – masing sistem persamaan linier berikut dalam matriks

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 \qquad\quad - 2x_4 - 2x_5 &= 2 \\ 6x_2 - 2x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ 2x_3 + 14x_4 \qquad &= 2 \end{aligned}$$

5. Tuliskan sistem persamaan linier berikut dalam matriks

$$\begin{aligned} 6x_1 \qquad\quad - 6x_3 &= 3 \\ 9x_1 - 3x_2 + 12x_3 &= 21 \\ 18x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

6. Temukan sistem linier dengan variabel $x_1, x_2, x_3, \ldots$ yang sesuai dengan matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal BAB I

1. Manakah dari persamaan dibawah yang merupakan persamaan linier yang mempunyai solusi tunggal? Buktikan!
   a. $2x + 3y = 3$
      $x + y = 5$
   b. $10x + 42y = 52$
      $4\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 4$
   c. $14x + 46y = 124$
      $7x + 23y = 3$

2. Apakah persamaan dibawah ini ada yang mempunyai solusi tak hingga?

   a. $41x - 31y = 35$
      $91x - 67y = 31$

b. $53x - 42y = 12$
$25x - 21y = 24$

c. $2x - 2y = 73$
$4x + 4y = 146$

3. Tuliskan persamaan dibawah dalam bentuk matriks!

$$x_1 + 3x_2 - 24x_3 = 64$$
$$5x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 8$$
$$4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 22$$

4. Ubah persamaan linier berikut ke bentuk matriks!

a. $5x - 4y = 20$
$2x + 2y = 14$

b. $4x + y - 6z = 20$
$8x - 2z = 10$
$5x + 10y = 42$

c. $8x + 15y = 140$
$33y + 66z = 99$

5. Temukan sistem linier dengan variabel $x_1, x_2, x_3, \ldots$ yang sesuai dengan matriks berikut.

a. $\begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 & 10 \\ 14 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & -4 & 2 & 14 \end{bmatrix}$

Bab II
MATRIKS

2.1. KONSEP DASAR MATRIKS

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Bentuk umum matriks adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ordo matriks adalah ukuran matriks yang tersusun atas baris dan kolom, jika matriks tersusun atas m baris dan n kolom maka dikatakan matriks tersebut berukuran (berordo) m x n. Penulisan matriks biasanya menggunakan huruf besar A, B, C dan seterusnya, sedangkan penulisan matriks beserta ukurannya (matriks dengan m baris dan n kolom) adalah $A_{(mxn)}$.

Contoh matriks berukuran 2x3 adalah sebagai berikut :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal 2.1

Coba tentukan ordo matriks berikut ini:

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$
2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$
3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$
4. $D = \begin{bmatrix} 63 & 234 & 521 \\ 432 & 623 & 554 \\ 563 & 124 & 564 \\ 936 & 313 & 452 \end{bmatrix}$
5. $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$

2.2. JENIS MATRIKS

Ada beberapa jenis Matriks yang sering digunakan dalam pembahasan tentang operasi matriks, dan penggunaan Matriks, yaitu :

1. **Matriks Tunggal *(Singleton Matrices)***

   Sebuah matriks yang hanya mempunyai satu entri disebut matriks tunggal. Matriks jenis ini mempunyai jumlah kolom dan jumlah baris sebanyak 1. Matriks Tunggal dapat direpresentasikan sebagai $[a]_{1\times 1}$.

   Contoh Matriks Tunggal

   $$[7]_{1\times 1}$$

   Pada contoh Matriks Tunggal di atas, hanya ada satu entri yaitu 7.

2. **Matriks nol**

   Sebuah matriks nol adalah matriks yang semua entrinya samadengan 0 (nol). Matriks nol dapat berupa matriks persegi, atau dapat juga mempunyai jumlah baris dan kolom yang tidak sama. Matriks nol direpresentasikan sebagai 0.

Contoh Matriks Nol (0)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat penting dari Matriks Nol adalah:

a. Matriks nol dapat berupa matriks persegi (bujur sangkar), yaitu matriks tersebut dapat mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama.

b. Matriks nol dapat berupa matriks persegi panjang, yaitu matriks tersebut dapat mempunyai jumlah baris dan kolom yang tidak sama.

c. Determinan matriks nol samadengan nol, maka matriks nol merupakan matriks singular.

d. Suatu matriks nol dijumlahkan dengan matriks lain A yang berukuran sama, maka $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$.

e. Suatu matriks nol dikalikan dengan matriks A yang lain, maka matriks yang dihasilkan adalah matriks nol.

f. $A \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times A = \mathbf{0}$.

g. Suatu matriks A yang dikurangkan dari matriks A, maka matriks yang dihasilkan adalah matriks nol.

3. Matriks Baris

Suatu matriks disebut matriks baris apabila hanya mempunyai satu baris. Suatu matriks $A = [a_{ij}]$ dikatakan matriks baris jika ukuran matriksnya adalah $1 \times n$.

Contoh Matriks Baris

$$\boldsymbol{A} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3}]$$

Matriks pada contoh di atas adalah matriks baris berukuran 1×3, yang memiliki satu baris dan tiga kolom yang sama dengan jumlah entri dalam matriks tersebut.

Beberapa sifat penting dari matriks baris yaitu

a. Suatu matriks baris hanya akan mempunyai satu baris.
b. Suatu matriks baris dapat mempunyai banyak kolom.
c. Matriks baris dapat merupakan matriks persegi panjang dan matriks horisontal.
d. Transpos dari matriks baris merupakan matriks kolom.
e. Dua matriks baris dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika ukuran kedua matriksnya sama.
f. Matriks baris hanya dapat dikalikan dengan matriks kolom jika dan hanya jika jumlah kolom dari matriks baris sama dengan jumlah baris dari matriks kolom, dan hasilnya berupa matriks tunggal.

4. Matriks Kolom

Suatu matriks disebut matriks kolom apabila hanya mempunyai satu kolom. Suatu matriks $A = [a_{ij}]$ dikatakan matriks kolom jika ukuran matriksnya adalah $m \times 1$.

Contoh Matriks Kolom

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Matriks Kolom

a. Suatu matriks kolom mempunyai entri sebanyak jumlah barisnya.
b. Suatu matriks kolom juga merupakan matriks persegi panjang dan matriks vertikal.
c. Transpos dari suatu matriks kolom merupakan matriks baris.
d. Dua matriks kolom apa pun dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika ukuran kedua matriksnya sama.
e. Matriks kolom hanya dapat dikalikan dengan matriks baris jika dan hanya jika jumlah kolom dari matriks kolom samadengan jumlah baris dari matriks baris tertentu, dan menghasilkan matriks persegi.

5. Matriks Horisontal

Matriks horisontal merupakan matriks yang mempunyai jumlah baris lebih sedikit dari jumlah kolomnya ($[A]_{i\times j}$ dengan i < j).

Contoh Matriks Horisontal

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 80 & 70 & 60 & 50 \end{bmatrix}$$

Pada contoh matriks di atas, jumlah barisnya adalah 2 sedangkan jumlah kolomnya adalah 4 sehingga menjadikannya matriks horisontal.

6. Matriks Vertikal

Matriks vertikal adalah matriks yang mempunyai jumlah baris lebih banyak dari jumlah kolomnya ($[A]_{i\times j}$ dengan i > j).

Contoh Matriks Vertikal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Pada contoh matriks di atas, jumlah barisnya adalah 4 sedangkan jumlah kolomnya adalah 2 sehingga menjadikannya matriks vertikal.

7. Matriks Persegi Panjang

Suatu matriks disebut matriks persegi panjang apabila jumlah baris dan kolomnya tidak sama ($[A]_{m\times n}$ dengan $m \neq n$).

Contoh matriks persegi panjang :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Pada contoh matriks di atas, dapat dilihat bahwa jumlah baris adalah 3 sedangkan jumlah kolom adalah 4 yaitu keduanya tidak sama sehingga menjadikannya matriks persegi panjang. Matriks persegi panjang dapat merupakan matriks horizontal, atau matriks vertikal.

Sifat-sifat Matriks Persegi Panjang

a. Ukuran matriks persegi panjang mempunyai jumlah baris dan kolomnya berbeda.
b. Suatu matriks persegi panjang mempunyai jumlah baris lebih sedikit dari jumlah kolomnya, maka matriks tersebut disebut matriks horisontal (dengan $i < j$).
c. Suatu matriks persegi panjang mempunyai jumlah baris lebih banyak dari jumlah kolomnya, maka matriks tersebut disebut matriks vertikal (dengan $i > j$).
d. Apabila ada dua atau lebih matriks persegi panjang dapat dilakukan operasi matriks penjumlahan atau pengurangan, jika dan hanya jika semua ukuran matriksnya sama.
e. Dua matriks persegi panjang (A x B) dapat dilakukan operasi matriks pengalian, jika dan hanya jika jumlah kolom pada matriks persegi panjang A dan jumlah baris pada matriks persegi panjang B sama.
f. Hasil kali dua matriks persegi panjang bisa berbentuk persegi panjang, atau dapat berupa matriks persegi (bujur sangkar).

8. Matriks Persegi (matriks bujur sangkar)

Matriks persegi merupakan matriks yang mempunyai jumlah baris sama dengan jumlah kolomnya ($[A]_{n\times n}$). Oleh karena jumlah baris dan kolomnya sama, maka matriks persegi dapat juga disebut matriks bujur sangkar.

Contoh Matriks Persegi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Pada contoh Matriks Persegi di atas, jumlah baris dan kolomnya adalah 3, sehingga tampak seperti struktur persegi.

Sifat-sifat Matriks Persegi

a. Oleh karena setiap matriks persegi mempunyai jumlah baris dan kolomnya sama, maka dapat dihitung nilai determinannya.

b. Jika determinan dari suatu matriks persegi sama dengan nol, maka matriks tersebut disebut matriks singular.
c. Jika determinan dari suatu matriks persegi tidak samadengan nol, maka disebut matriks non singular.
d. Pada matriks persegi dapat dilakukan operasi, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, invers.

9. Matriks Singular

Matriks singular merupakan matriks yang mempunyai determinan samadengan nol (det (A) = 0).

Contoh Matriks Singular

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Rumus dari determinan matriks 2x2 adalah *ad-bc*

Maka, $(4\,.\,3) - (2\,.\,6) = 12 - 12 = 0$

10. Matriks Non Singular

Matriks Non Singular merupakan matriks yang mempunyai determinan tidak samadengan nol (det (A) tidak samadengan 0), sehingga dapat dilakukan invers.

Contoh Matriks Non-Singular

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks diatas adalah

$$(3\,.\,1) - (2\,.\,2) = 3 - 4 = \ -1$$

11. Matriks Skalar

Suatu matriks persegi disebut matriks skalar apabila entri-entri diagonal utamanya sama dan entri-entri lainnya adalah nol.

Contoh Matriks Skalar

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

12. Matriks Diagonal

Suatu matriks persegi disebut matriks diagonal apabila semua entri bernilai nol kecuali entri-entri diagonal utamanya (tidak harus sama). Matriks persegi $A = [a_{ij}]$ dikatakan matriks diagonal jika $a_{ij} = 0$ ketika $i \neq j$.

Contoh Matriks diagonal berukuran 5 × 5.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

13. Matriks Identitas

Suatu matriks persegi disebut matriks identitas apabila semua entri-entri diagonal utamanya adalah satu (1) dan entri-entri lainnya adalah nol.

Contoh Matriks Identitas

$$\boldsymbol{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Matriks Simetris

Suatu matriks persegi disebut matriks simetris apabila transposnya samadengan matriks aslinya. A adalah matriks persegi berukuran n×n dan dikatakan matriks simetris jika $A^T = A$.

Contoh Matriks Simetris

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \text{jika di transpose maka } \boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

15. Matriks Skew-Simetris (*skew-symmetric matrices*)

Suatu matriks persegi disebut matriks skew-simetris apabila transposnya samadengan negatif matriks aslinya. Misalkan A adalah matriks persegi berukuran n×n, disebut matriks simetris jika $A^T = -A$.

Contoh matriks Skew-Simetris

Misal kita mempunyai matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Transpose nya adalah $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

dan negatifnya adalah $-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

16. Matriks Ortogonal

Suatu matriks persegi disebut matriks ortogonal apabila inversnya sama dengan transpose matriks. Misalkan A adalah matriks persegi berukuran n×n, disebut matriks ortogonal jika $A^{-1} = A^T$ atau $AA^T = A^TA = I$.

Contoh matriks ortogonal

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Mengapa? Mari kita lihat pembahasan dibawah ini.

Dengan definisi matriks ortogonal adalah $AA^T = I$ (dimana I adalah matriks identitas dari matriks A yaitu $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$)

Kita akan coba hitung AA^T terlebih dahulu

$$AA^T = \frac{1}{3} * \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Dapat terbukti bahwa $AA^T = I$

17. Matriks Segitiga Atas

Suatu matriks persegi yang semua entri **di bawah diagonal utamanya bernilai nol** disebut Matriks Segitiga Atas. Suatu matriks persegi $A = [a_{ij}]$ disebut matriks segitiga atas jika $a_{ij} = 0$ untuk semua $i > j$.

Contoh Matriks Segitiga Atas

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

18. Matriks Segitiga Bawah

Suatu matriks persegi yang semua entri **di atas diagonal utamanya bernilai nol** disebut Matriks Segitiga Bawah. Suatu matriks persegi $A = [a_{ij}]$ disebut matriks segitiga bawah jika $a_{ij} = 0$ untuk semua $i < j$.

Contoh Matriks Segitiga Bawah

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal 2.2

Tentukan jenis matriks berikut ini!

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3. OPERASI MATRIKS

Pada operasi matriks dasar terdiri dari Penjumlahan Matriks, Pengurangan Matriks, dan Perkalian Matriks, sedang operasi pembagian pada matriks tidak ada, yang ada adalah operasi Invers. Berikut ini adalah beberapa operasi matriks yang akan dibahas yaitu :

PENJUMLAHAN MATRIKS

Penjumlahan matriks merupakan salah satu operasi dasar yang dilakukan pada matriks. Dua atau lebih matriks berukuran sama dapat dijumlahkan dengan menjumlahkan entri-entri matriks yang bersesuaian. Jika A = $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ adalah dua matriks yang berdimensi sama, yaitu mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama, maka penjumlahan matriks A dan B adalah :

$$\mathbf{A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}].}$$

Matriks penjumlahan dapat berupa matriks persegi atau matriks persegi panjang, tetapi matriks-matriks tersebut harus berukuran sama.

Contoh Penjumlahan Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Ada beberapa sifat penjumlahan matriks yang berlaku jika A, B, dan C memiliki ukuran matriks yang sama. Aturan tersebut antara lain:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = 0 + A = A$
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Penjumlahan matriks mengikuti sifat yang menyerupai penjumlahan bilangan:

a. Penjumlahan matriks untuk matriks A = [a_{ij}] dan B = [b_{ij}] yang berukuran sama m×n,

$$\mathbf{A + B = B + A.}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+5 & 5+1 & 1+2 \\ 3+9 & 4+3 & 9+6 \\ 7+8 & 2+4 & 6+3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 12 & 7 & 15 \\ 15 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$B + A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 5+2 & 1+5 & 2+1 \\ 9+3 & 3+4 & 6+9 \\ 8+7 & 4+2 & 3+6 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 12 & 7 & 15 \\ 15 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

b. Penjumlahan matriks untuk matriks A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] dan C = [c_{ij}] yang berukuran sama m×n,

(A + B) + C = A + (B + C).

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} 2+3 & 3+5 & 1+4 \\ 3+1 & 4+2 & 2+5 \\ 2+4 & 1+3 & 5+2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}5+5 & 8+3 & 5+2\\ 4+4 & 6+1 & 7+3\\ 6+2 & 4+4 & 7+5\end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}10 & 11 & 7\\ 8 & 7 & 10\\ 8 & 8 & 12\end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\ 1 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}\right)$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}3+5 & 5+3 & 4+2\\ 1+4 & 2+1 & 5+3\\ 4+2 & 3+4 & 2+5\end{bmatrix}\right)$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}8 & 8 & 6\\ 5 & 3 & 8\\ 6 & 7 & 7\end{bmatrix}\right)$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}2+8 & 3+8 & 1+6\\ 3+5 & 4+3 & 2+8\\ 2+6 & 1+7 & 5+7\end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}10 & 11 & 7\\ 8 & 7 & 10\\ 8 & 8 & 12\end{bmatrix}$$

c. Penjumlahan matriks untuk matriks A = $[a_{ij}]$ dan matriks nol yang berukuran sama m × n, **A + 0 = 0 + A = A**

Contoh :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

$$A+0=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A+0=\begin{bmatrix}1+0 & 2+0 & 3+0\\ 4+0 & 5+0 & 6+0\\ 7+0 & 8+0 & 9+0\end{bmatrix}$$

$$A+0=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

d. Penjumlahan matriks untuk matriks A = [a_{ij}] dan -A = [$-a_{ij}$] yang berukuran sama m × n, A + (-A) = **0**

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -5 \\ -8 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 + (-2) & 4 + (-4) & 6 + (-6) \\ 1 + (-1) & 3 + (-3) & 5 + (-5) \\ 8 + (-8) & 7 + (-7) & 9 + (-9) \end{bmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e. Transpose dari penjumlahan matriks untuk matriks A = [a_{ij}] dan B = [b_{ij}] yang berukuran sama

$$\mathbf{(A + B)^T = A^T + B^T}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$(A + B)^T = \left(\begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 15 & 9 & 7 \\ 9 & 17 & 11 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 15 & 9 \\ 6 & 9 & 17 \\ 9 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 4 & 15 & 9 \\ 6 & 9 & 17 \\ 9 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

f. Determinan dari penjumlahan matriks untuk dua matriks A = [a_{ij}] dan B = [b_{ij}] yang berukuran sama

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Menggunakan aturan Sarrus:

$$|A + B| = \left|\begin{matrix} 9 & 6 & 13 \\ 12 & 5 & 6 \\ 10 & 9 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 9 & 6 \\ 12 & 5 \\ 10 & 9 \end{matrix}$$

$$|A + B| = 9 \times 5 \times 4 + 6 \times 6 \times 10 + 13 \times 12 \times 9$$
$$- (10 \times 5 \times 13 + 9 \times 6 \times 9 + 4 \times 12 \times 6)$$

$$|A + B| = 180 + 360 + 1404 - (650 + 486 + 288)$$

$$|A + B| = 520$$

Sedangkan,

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$|A| = 2 \times 2 \times 3 + 4 \times 1 \times 1 + 5 \times 6 \times 5 - (1 \times 2 \times 5 + 5 \times 1 \times 2 + 3 \times 6 \times 4)$$

$$|A| = 12 + 4 + 150 - (10 + 10 + 72)$$

$$|A| = 74$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \\ 9 & 4 \end{matrix}$$

$$|B| = 7 \times 3 \times 1 + 2 \times 5 \times 9 + 8 \times 6 \times 4 - (9 \times 3 \times 8 + 4 \times 5 \times 7 + 1 \times 6 \times 2)$$

$$|B| = 21 + 90 + 192 - (216 + 140 + 12)$$

$$|B| = -65$$

PENGURANGAN MATRIKS

Operasi pengurangan matriks dapat dilakukan apabila matriks-matriksnya mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama. Dalam operasi pengurangan dua matriks, dapat dilakukan dengan mengurangkan entri-entri pada setiap baris dan kolom yang bersesuaian, dari masing-masing entri pada baris dan kolom matriks lainnya. Jika dua matriks A dan B berukuran sama m×n, dinotasikan sebagai, $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$, maka selisih dua matriks A dan B dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]}$$

Contoh :

Beberapa sifat pengurangan matriks

a. Pengurangan matriks tidak bersifat komutatif,

$$\mathbf{A - B \neq B - A}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-3 & 3-2 & 6-4 \\ 4-1 & 1-3 & 2-2 \\ 3-4 & 6-5 & 4-1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$B - A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 3-5 & 2-3 & 4-6 \\ 1-4 & 3-1 & 2-2 \\ 4-3 & 5-6 & 1-4 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

b. Pengurangan matriks tidak bersifat asosiatif,

$$\mathbf{(A - B) - C \neq A - (B - C)}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A - B) - C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A - B) - C = \left(\begin{bmatrix} 2-1 & 4-2 & 6-5 \\ 6-3 & 2-5 & 3-7 \\ 9-4 & 5-8 & 1-6 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A - B) - C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -4 \\ 5 & -3 & -5 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A - B) - C = \begin{bmatrix} 1-6 & 2-4 & 1-2 \\ 3-7 & -3-8 & -4-9 \\ 5-1 & -3-5 & -5-7 \end{bmatrix}$$

$$(A - B) - C = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -4 & -11 & -13 \\ 4 & -8 & -12 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$A - (B - C) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$A - (B - C) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1-6 & 2-4 & 5-2 \\ 3-7 & 5-8 & 7-9 \\ 4-1 & 8-5 & 6-7 \end{bmatrix} \right)$$

$$A - (B - C) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -4 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$A - (B - C) = \begin{bmatrix} 2-(-5) & 4-(-2) & 6-3 \\ 6-(-4) & 2-(-3) & 3-(-2) \\ 9-3 & 5-3 & 1-(-1) \end{bmatrix}$$

$$A - (B - C) = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 10 & 5 & 5 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

c. Pengurangan matriks dari dirinya sendiri menghasilkan matriks nol,

A-A = 0

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A - A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A - A = \begin{bmatrix} 3-3 & 6-6 & 9-9 \\ 2-2 & 4-4 & 6-6 \\ 1-1 & 3-3 & 5-5 \end{bmatrix}$$

$$A - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d. Pengurangan matriks adalah penjumlahan negatif suatu matriks ke matriks lain,

A - B = A + (-B)

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 7-5 & 2-1 & 4-3 \\ 5-6 & 1-4 & 8-7 \\ 3-9 & 4-2 & 9-5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$A + (-B) = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -1 & -3 \\ -6 & -4 & -7 \\ -9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A + (-B) = \begin{bmatrix} 7 + (-5) & 2 + (-1) & 4 + (-3) \\ 5 + (-6) & 1 + (-4) & 8 + (-7) \\ 3 + (-9) & 4 + (-2) & 9 + (-5) \end{bmatrix}$$

$$A + (-B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

PERKALIAN MATRIKS

Perkalian matriks dapat dilakukan pada matriks A dan matriks B, jika jumlah kolom pada matriks A sama dengan jumlah baris pada matriks B, maka urutan matriks menjadi penting.

Beberapa sifat perkalian matriks :

a. Perkalian matriks tidak mengikuti hukum komutatif

$$\mathbf{AB \neq BA}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 3 & 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 2 & 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 \\ 2 \times 5 + 4 \times 6 + 6 \times 3 & 2 \times 3 + 4 \times 4 + 6 \times 2 & 2 \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 1 \\ 1 \times 5 + 3 \times 6 + 5 \times 3 & 1 \times 3 + 3 \times 4 + 5 \times 2 & 1 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 26 & 17 & 8 \\ 52 & 34 & 16 \\ 38 & 25 & 12 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5\times 1+3\times 2+1\times 1 & 5\times 2+3\times 4+1\times 3 & 5\times 3+3\times 6+1\times 5 \\ 6\times 1+4\times 2+2\times 1 & 6\times 2+4\times 4+2\times 3 & 6\times 3+4\times 6+2\times 5 \\ 3\times 1+2\times 2+1\times 1 & 3\times 2+2\times 4+1\times 3 & 3\times 3+2\times 6+1\times 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 25 & 38 \\ 16 & 34 & 52 \\ 8 & 17 & 26 \end{bmatrix}$$

b. Sifat distributif atas penjumlahan matriks untuk perkalian matriks A dan matriks B dengan matriks C,

$$\mathbf{A(B + C) = AB + AC}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 7 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 10 \\ 5 & 5 & 10 \end{bmatrix} \right)$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 52 & 68 & 72 \\ 61 & 81 & 98 \\ 67 & 105 & 114 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 31 & 37 & 32 \\ 32 & 45 & 41 \\ 33 & 58 & 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & 31 & 40 \\ 29 & 36 & 57 \\ 34 & 47 & 77 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 52 & 68 & 72 \\ 61 & 81 & 98 \\ 67 & 105 & 114 \end{bmatrix}$$

c. Perkalian matriks dengan skalar k untuk matriks A dan B,

k(AB) = (kA)B = A(kB)

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k = 2$$

$$k(AB) = 2\left(\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$k(AB) = 2\left(\begin{bmatrix} 40 & 82 & 21 \\ 36 & 114 & 33 \\ 40 & 121 & 41 \end{bmatrix}\right)$$

$$k(AB) = \begin{bmatrix} 80 & 164 & 42 \\ 72 & 228 & 66 \\ 80 & 242 & 82 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$(kA)B = \left(2\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(kA)B = \left(\begin{bmatrix} 12 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 14 \\ 10 & 18 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(kA)B = \begin{bmatrix} 80 & 164 & 42 \\ 72 & 228 & 66 \\ 80 & 242 & 82 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$A(kB) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}\left(2\begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$A(kB) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 10 & 16 & 4 \\ 2 & 14 & 6 \\ 6 & 18 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$A(kB) = \begin{bmatrix} 80 & 164 & 42 \\ 72 & 228 & 66 \\ 80 & 242 & 82 \end{bmatrix}$$

d. Sifat transpos perkalian matriks untuk dua matriks A dan B,

$$\mathbf{(AB)^T = B^T A^T}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}\right)^T$$

$$(AB)^T = \left(\begin{bmatrix} 65 & 24 & 85 \\ 89 & 45 & 42 \\ 105 & 59 & 69 \end{bmatrix}\right)^T$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 65 & 89 & 105 \\ 24 & 45 & 59 \\ 85 & 42 & 69 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 5 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 65 & 89 & 105 \\ 24 & 45 & 59 \\ 85 & 42 & 69 \end{bmatrix}$$

e. Asosiatif perkalian matriks untuk tiga matriks misalnya A, B, dan C, sehingga

(AB)C = A(BC)

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 8 & 1 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 8 & 1 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 75 & 76 & 71 \\ 88 & 76 & 80 \\ 68 & 67 & 61 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 1027 & 1188 & 1177 \\ 976 & 1172 & 1128 \\ 898 & 1045 & 1045 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 8 & 1 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix} \right)$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 83 & 83 & 62 \\ 46 & 60 & 70 \\ 69 & 90 & 105 \end{bmatrix} \right)$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1027 & 1188 & 1177 \\ 976 & 1172 & 1128 \\ 898 & 1045 & 1045 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks Terpartisi

Sebuah matriks bisa dibagi atau dipartisi menjadi matriks – matriks yang lebih kecil dengan menyelipkan garis horizontal dan vertical di antara baris dan kolom yang ditentukan. Metode ini dapat digunakan untuk menyederhanakan pada matriks yang mempunyai ukuran yang besar.

Contohnya, jika $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$,

maka AB dapat dinyatakan sebagai

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{21}B_{11} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Trace Suatu Matriks Bujur Sangkar

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka trace A dinyatakan dengan tr(A), didefinisikan sebagai jumlah anggota – anggota pada diagonal utama A. Trace A terdefinisi jika A bukan matriks bujur sangkar.

Contohnya,

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \text{ maka } tr(B) = B_{11} + B_{22} + B_{33}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$tr(B) = B_{11} + B_{22} + B_{33}$$

$$tr(B) = 2 + 3 + 2$$

$$tr(B) = 7$$

Latihan Soal 2.3

1. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan $A + C + B$

2. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Tentukan

a. $A^T + B^T$

b. $C + (A^T - B^T)^T$

3. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -7 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 8 \\ -9 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan

a. $A + (-C)$

b. $B - C - (-A)$

4. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -7 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 8 \\ -9 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \text{dan } D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 8 \\ -9 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan $BC - (A + 2D)$

5. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 5 \\ -8 & -1 & 7 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 9 \\ -2 & -5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Tentukan $tr(A) + tr(B)$

2.4. OPERASI BARIS ELEMENTER

Transformasi Elemen Matriks.

1. Menukar 2 baris/kolom.

   Notasi:

   B_iB_j: Baris i ditukar dengan baris j

   K_iK_j: Kolom i ditukar dengan baris j

   Contoh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1B_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_1K_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Mengalikan setiap elemen baris/kolom dengan skalar.

   Notasi:

   kB_i: setiap elemen baris i dikalikan dengan k

   kK_i: setiap elemen kolom i dikalikan dengan k

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2B_1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2K_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Menambahkan setiap elemen baris/kolom dengan kali elemen baris/kolom yang lain.

Notasi:

$kB_j + B_i$: setiap elemen baris i ditambah k kali setiap elemen baris j

$kK_j + K_i$: setiap elemen kolom i ditambah k kali setiap elemen kolom j

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2B_2+B_1} \begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2K_2+K_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 11 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5. METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Eselon Baris dan Eselon Baris Tereduksi.

Sifat matriks yang harus dipenuhi pada eselon baris tereduksi:

1. Jika pada baris yang sepenuhnya tak nol dan unsur tak nol pertama adalah 1, maka dinamakan *leading one* atau pivot.
2. Jika pada barus yang sepenuhnya nol, maka baris tersebut dikelompokkan pada baris yang paling bawah.
3. Pada baris yang berurutan yang tidak sepenuhnya nol, leading one baris yang lebih rendah terletak lebih ke kanan daripada *leading one* pada baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom yang memuat *leading one* mempunyai 0 di tempat lain pada kolom tersebut.

Suatu matriks dinamakan eselon baris jika memenuhi sifat 1, 2, dan 3.

Contoh:

Sifat 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

Sifat 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Contoh Matriks Eselon Baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh Matriks Eselon Baris Tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi

1. Eliminasi Gaussian ditemukan oleh Carl Friedrich Gauss. Eliminasi Gaussian mengubah matriks menjadi eselon baris.
2. Eliminasi Gauss-Jordan mengubah matriks menjadi eselon baris tereduksi.

Contoh langkah eliminasi

Carilah eselon baris dengan menggunakan eliminasi Gaussian, kemudian carilah eselon baris tereduksi dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan dari matriks di bawah ini

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Langkah pertama cari *leading one* pada baris pertama kolom pertama, yaitu dengan mengalikan baris pertama dengan $\frac{1}{2}$, maka

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Di bawah *leading one* baris pertama harus nol, pada baris kedua kolom pertama sudah nol, maka kita akan membuat nol pada baris ketiga kolom pertama, yaitu (-2) dikalikan baris pertama kemudian ditambahkan ke baris 3, maka

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_1+B_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya kita akan buat *leading one* pada baris kedua kolom kedua, yaitu mengalikan baris kedua dengan $\frac{1}{2}$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

Di bawah *leading one* baris dua harus nol, maka kita akan membuat baris ketiga kolom kedua menjadi nol, yaitu dengan mengalikan 4 pada baris kedua kemudian ditambahkan pada baris ketiga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{4B_2+B_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -6 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya kita akan buat *leading one* pada baris ketiga kolom ketiga, yaitu mengalikan baris ketiga dengan $\frac{1}{10}$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{10}B_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh *leading one* pada semua baris, maka kita sudah menemukan ***eselon baris***. Langkah dalam menemukan eselon baris ini dinamakan dengan ***eliminasi Gaussian***.

Untuk memperoleh eselon baris tereduksi, maka kita akan melanjutkan dengan membuat nol di atas *leading one*. Baris kedua kolom ketiga akan kita jadikan nol, dengan cara mengalikan baris ketiga dengan (-3) kemudian ditambahkan pada baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{-3B_3+B_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Karena baris pertama kolom ketiga sudah nol, maka kita akan membuat nol pada baris pertama kolom kedua dengan mengalikan baris kedua dengan (-2) kemudian ditambahkan pada baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_2+B_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Bentuk terakhir tersebut berupa ***eselon baris tereduksi***. Algoritma yang baru saja kita lakukan untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi disebut ***eliminasi Gauss–Jordan***.

Latihan Soal 2.4

Gunakan operasi baris elementer untuk mengubah matriks A menjadi bentuk eselon baris.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

d. $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

e. $E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 12 \\ 2 & -2 & -4 & -8 \\ 6 & -4 & 10 & 22 \\ 4 & 10 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

2.6. RANK MATRIKS

Definisi

a. Rank matriks adalah jumlah maksimum dari vektor baris yang linier independen, atau

b. Rank matriks adalah jumlah maksimum dari vektor kolom yang linier independen.

Linier Independen dan Linier Dependen

$$A = [1 \quad 2 \quad 3]$$

$$B = [4 \quad 5 \quad 6]$$

$$C = [5 \quad 7 \quad 9]$$

$$D = [2 \quad 4 \quad 6]$$

$$E = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$F = [0 \quad 0 \quad 1]$$

- Matriks A dan B saling linier independen, karena matriks A hasil bukan perkalian skalar dari matriks B
- Matriks A dan D adalah linier dependen, karena D hasil perkalian skalar A, yaitu D=2A
- Matriks C adalah kombinasi linier dari matriks A dan B, karena C=A+B, oleh karena itu matriks A, B, dan C adalah linier dependen
- Matriks D, E, dan F adalah linier independen, kerena tidak dapat dibagi dengan perkalian skalar atau kombinasi linier pada setiap himpunan matriks.

Untuk matriks dengan ukuran r x c:

- Jika r lebih kecil dari c, maka rank maksimum dari matriks tersebut adalah r.
- Jika r lebih besar dari c, maka rank maksimum dari matriks tersebut adalah c.
- Rank suatu matriks bisa nol jika matriks tersebut tidak punya elemen. Jika matriks punya 1 elemen maka rank minimumnya adalah 1.

Kita coba kerjakan contoh soal

Tentukan rank matriks di bawah ini dengan menggunakan eliminasi Gaussian.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaiannya,

a. $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2B_1 + B_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4B_1 + B_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 11 & -10 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{-3}B_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-11B_2 + B_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 23 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{23}B_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi Rank(A) = 3, karena terdapat 3 vektor baris yang linier independen.

b. $$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{-2B_1 + B_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 10 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4B_1 + B_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & 20 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2}B_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4B_2 + B_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi Rank(B) = 2 karena terdapat 2 vektor baris yang linier independen.

Latihan Soal 2.5

1. Tentukan transpose dari matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan transpose dari matriks berikut

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan $(ab) + (cd)$ apabila diketahui

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 7 \\ 10 & 6 & 6 \\ 11 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Tentukan trace dari matriks berikut

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

5. Tentukan trace dari matriks berikut

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & -9 & 0 \\ 5 & 5 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal Bab II

1. Tentukan jenis matriks di bawah ini.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. Tentukan $B + A - C$ jika diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 6 & 2 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan AB apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Tentukan $BA - B$ apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

5. Tentukan $ABC + A$ apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

6. Diketahui matriks A dan B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

   Tentukan

   a. $3A + 2B$
   b. $-3B + 4A$
   c. $3(AB) - B$
   d. $-2A + (BA)$

7. Tentukan $(3A) - kB$ apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 7 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Tentukan $(2A)B$ apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

9. Tentukan $tr(B) - tr(A)$ apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & -5 & 8 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

10. Tentukan A^T apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -6 & 9 & 5 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Tentukan $(4A)^T$ apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 7 & -4 & 6 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

12. Tentukan $(2B + 3C - A)^T$ apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & 9 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8 & 7 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

13. Tentukan $(AB)^T$ apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 5 & -6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Tentukan $(a + b) - (c + d)$ jika diketahui

$$2\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

15. Tentukan $(ab) + (cd)$ apabila diketahui

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

16. Tentukan $(a + c) - ef + (b + d - g - h + i)$ apabila diketahui

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & -3 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

17. Gunakan operasi baris elementer untuk mengubah matriks A menjadi bentuk eselon baris.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

18. Gunakan operasi baris elementer untuk mengubah matriks A menjadi bentuk eselon baris.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

19. Gunakan operasi baris elementer untuk mengubah matriks A menjadi bentuk eselon baris tereduksi.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

20. Gunakan operasi baris elementer untuk mengubah matriks A menjadi bentuk eselon baris tereduksi.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 6 \\ -2 & 5 & -2 & 6 \\ 4 & 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Bab III

DETERMINAN DAN INVERS

3.1. DETERMINAN

Determinan matriks adalah suatu bagian untuk mencari invers dari suatu matriks, setiap matriks bujur sangkar mempunyai determinan. Notasi determinan adalah | A | atau det(A).

DETERMINAN MATRIKS ORDO 2X2

Determinan matriks ordo 2x2 dapat diperoleh dari rumus $ad - bc$

Contohnya, ada matriks $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ Penyelesaian determinan matriks adalah sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc = (3 \times\ -2) - (1 \times 4) = \ -6 \times 4$$
$$= \ -24$$

DETERMINAN MATRIKS ORDO 3X3

Determinan matriks ordo 3x3 dapat dilakukan dengan metode Sarrus. Caranya adalah seperti ini:

$$\left|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$
$$-\quad -\quad -\qquad\qquad +\quad +\quad +$$

Contoh determinan matriks $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-8} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-8} & \mathbf{9} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$$

$$(\mathbf{1} * \mathbf{5} * \mathbf{9}) + (\mathbf{2} * \mathbf{6} * \mathbf{7}) + (\mathbf{3} * \mathbf{-4} * \mathbf{-8}) - (\mathbf{2} * \mathbf{-4} * \mathbf{9}) - (\mathbf{1} * \mathbf{6} * \mathbf{-8}) - (\mathbf{7} * \mathbf{5} * \mathbf{3})$$

$$= \mathbf{45} + \mathbf{84} + \mathbf{96} - (\mathbf{-72}) - \mathbf{48} - \mathbf{105} = \mathbf{144}$$

Jadi, hasil akhir dari determinan matriks diatas adalah 144

Teorema 3.1.1

1. Jika A mempunyai baris atau kolom nol, maka **det(A) = 0**
2. Jika A merupakan matriks bujur sangkar, maka **det(A) = det($\mathbf{A^T}$)**
3. Jika A merupakan matriks segitiga atas atau bawah, maka det(A) adalah hasil kali elemen-elemen diagonal **det(A) = $\mathbf{a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}}$**
4. Efek transformasi elemen matriks pada determinan:
   a. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari perkalian baris atau kolom dari matriks A dikalikan dengan skalar K, maka **det(B) = K * det(A)**

Hubungan	Operasi
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **det(B) = k * det(A)**	Baris pertama matriks A dikalikan k

Contoh:

$$\begin{vmatrix} 2(4) & 2(5) & 2(6) \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

b. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari dua baris atau dua kolom dari matriks A dipertukarkan, maka **det(B) = -det(A)**

Hubungan	Operasi
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **det(B) = - det(A)**	Baris pertama matriks A ditukar dengan baris kedua

Contoh:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

c. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari perkalian skalar suatu baris dari matriks A dijumlahkan dengan baris lain atau perkalian skalar suatu kolom dari matriks A dijumlahkan dengan kolom lain, maka **det(B) = det(A)**

Hubungan	Operasi
$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **det(B) = det(A)**	Baris pertama matriks A ditambah dengan k kali baris kedua

Contoh:

$$\begin{vmatrix} 4+2(3) & 5+2(1) & 6+2(3) \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Determinan Matriks Identitas

   a. Jika matriks E dihasilkan dari perkalian salah satu baris l_n dengan k_n, maka **det(E) = K**

$$det(E) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

   b. Jika matriks E dihasilkan dari pertukaran dua baris pada matriks l_n, maka **det(E) = -1**

$$det(E) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

   c. Jika matriks E dihasilkan dari perkalian skalar suatu baris pada matriks l_n dijumlahkan dengan baris lain, maka **det(E) = 1**

$$det(E) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

DETERMINAN MATRIKS DENGAN BARIS ATAU KOLOMNYA PROPORSIONAL

Jika A adalah matriks bujur sangkar dengan baris atau kolom proporsional, maka **det(A) = 0**

Contoh

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{8} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{8} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{3} & \mathbf{-12} & \mathbf{15} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

MENCARI DETERMINAN DENGAN MENGGUNAKAN TRANSFORMASI ELEMEN MATRIKS

a. Menggunakan Baris Tereduksi

Misal ada matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$reduksi\ ke\ eselon\ baris$$

$$\det(A) = (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-55)(1) = 165$$

b. Menggunakan Operasi Kolom

Misal ada matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \to K_{41(-3)} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix}$$

$$= (1)(7)(3)(-26) = -546$$

DETERMINAN MATRIKS DENGAN EKSPANSI KOFAKTOR

Pertama, ada dua kata yang penting untuk diingat, yaitu minor dan kofaktor. Definisinya adalah jika A marupakan matriks persegi, maka **minor** dari elemen a_{ij} dinotasikan dengan M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang sisa setelah baris ke i dan kolom ke j dihapus dari A.

Jumlah $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan dengan C_{ij} dan disebut **kofaktor** dari elemen a_{ij}.

Contoh ada matiks A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Minor dari baris 2 kolom 2 adalah

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 26$$

Kofaktor dari baris 2 kolom 2 adalah

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -M_{22} = -26$$

Minor M_{ij} dan kofaktor C_{ij} yang bersesuaian adalah sama atau negatif satu sama lain dan tanda terkait $(-1)^{i+j}$ adalah -1 atau 1 sesuai dengan pola di bawah ini

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{bmatrix}$$

Kemudian dapat dilanjutkan dengan teknik mencari determinan memakai **ekspansi kofaktor**, definisinya adalah jika A adalah matriks persegi, maka angka yang diperoleh dari mengallikan elemen di setiap baris atau kolom dari A dengan kofaktor yang berkoresponden dan menambahkan hasil perkaliannya disebut **determinan A,** dan jumlahnya itu sendiri disebut **ekspansi kofaktor A**

Ekspansi kofaktor baris ke-i: **det(A) =** $\mathbf{a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}}$

Ekspansi kofaktor kolom ke-j: **det(A) =** $\mathbf{a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}Cnj}$

Jangan lupa juga perhatikan isi kolom atau baris, karena terkadang cara yang digunakan pada baris atau kolom tertentu dapat menjadi lebih mudah, contohnya adalah misal ada matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari det(A) akan lebih mudah menggunakan ekspansi kofaktor di sepanjang kolom kedua, karena pada kolom tersebut terdiri dari banyak nol.

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (1)(-2)(1+2) = -6$$

Misal ada matriks seperti ini

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaiannya adalah

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

— Jika A adalah matriks nxn, dan k adalah sembarang skalar, maka **det(kA) = k^n det(A)**

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{ka_{11}} & \boldsymbol{ka_{12}} & \boldsymbol{ka_{13}} \\ \boldsymbol{ka_{21}} & \boldsymbol{ka_{22}} & \boldsymbol{ka_{23}} \\ \boldsymbol{ka_{31}} & \boldsymbol{ka_{32}} & \boldsymbol{ka_{33}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{k^3} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix}$$

— **det(A+B) ≠ det(A) + det(B)**

— Jika A dan B merupakan matriks persegi dengan ukuran yang sama, maka **det(AB) = det(A) det(B)**

Latihan Soal 3.1

1. Carilah determinan matriks berikut ini dengan menggunakan ekspansi kofaktor!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan nilai X pada persamaan berikut ini!

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 9 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

3. Dengan ekspansi kofaktor, buktikan:

$$det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

4. Dengan ekspansi kofaktor, buktikan:

$$det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

5. Dengan ekspansi kofaktor, buktikan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

3.2. INVERS

Definisi

Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika B adalah matriks yang mempunyai ordo sama yang memenuhi AB = BA = I, maka a bisa dikatakan mempunyai invers (invertible) atau nonsingular, dan B adalah invers dari A

- Jika tidak ada matriks B yang diperoleh, maka A disebut **singular**
- Jika AB = BA = I, kita dapat mengatakan bahwa A dan B saling invers satu sama lain
- Invers matriks A dinotasikan dengan A^{-1}. Dengan demikian: A A^{-1} = I dan A^{-1} A = I

INVERS MATRIKS ORDO 2×2

Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mempunyai invers jika dan hanya jika **ad – bc ≠ 0**

Rumus invers nya adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh, tentukan apakah matriks berikut mempunyai invers?

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Mari kita coba yang matriks P, pertama kita cek dulu apakah matriks P akan mempunyai invers. Masukkan ke rumus ad – bc ≠ 0

$$(4 * \ -3) - (5 * \ -2) \neq 0$$

$$(-12) - (-10) \neq 0$$

$$2 \neq 0$$

Terbukti bahwa P mempunyai invers, kita masukkan ke rumus

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ untuk mencari invers nya

$$P^{-1} = \frac{1}{(4 * \ -3) - (5 * \ -2)} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Sekarang Anda coba kerjakan invers matriks untuk matriks Q!

INVERS MATRIKS ORDO 3×3

Mencari Invers Matriks Menggunakan Operasi Baris Elementer

Algoritma inversi: Untuk menemukan invers dari matriks A, gunakan operasi baris elementer yang mereduksi A menjadi identitas dan kemudian lakukan operasi yang sama pada I_n untuk mendapatkan A^{-1} .

Untuk lebih mudahnya, silahkan membuat matriks dengan bentuk awal $[A \mid I]$, kemudian dengan menggunakan OBE, matriks terakhir memiliki bentuk $[I \mid A^{-1}]$

Contoh:

Tentukan invers $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan operasi baris elementer.

Penyelesaian:

Kita akan bentuk $[A \mid I]$, maka

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2B_1+B_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-B_1+B_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2B_2+B_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-B_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{3B_3+B_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3B_3+B_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2B_2+B_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Matriks yang diperoleh dari eliminasi Gauss-Jordan sudah berbentuk $[I \mid A^{-1}]$, jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Mencari Invers Matriks Menggunakan Adjoint

Jika A adalah matriks $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks di bawah ini disebut ***matriks kofaktor dari A***.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Transpose dari matriks di atas disebut ***adjoint A*** dan dinotasikan $adj(A)$.

Contoh:

Tentukan kofaktor matriks dan adjoint dari matriks A berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Mari kita mencari minor terlebih dahulu.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

Apabila kita mau mencari kofaktor, maka:

$$C_{mn} = (-1)^{(m+n)} M_{mn}$$

diperoleh

$C_{11} = (-1)^{(1+1)} M_{11} = (1)(12) = 12$

$C_{21} = (-1)^{(2+1)} M_{21} = (-1)(-4) = 4$

$C_{31} = (-1)^{(3+1)} M_{31} = (1)(12) = 12$

$C_{12} = (-1)^{(1+2)} M_{12} = (-1)(-6) = 6$

$C_{22} = (-1)^{(2+2)} M_{22} = (1)(2) = 2$

$C_{32} = (-1)^{(3+2)} M_{32} = (-1)(10) = -10$

$C_{13} = (-1)^{(1+3)} M_{13} = (1)(-16) = -16$

$C_{23} = (-1)^{(2+3)} M_{23} = (-1)(-16) = 16$

$C_{33} = (-1)^{(3+3)} M_{33} = (1)(16) = 16$

Jadi kofaktor matriks $A = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$

Adjoint A adalah transpose dari kofaktor matriks A, jadi

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.2.1

Jika A adalah matriks yang mempunyai invers, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Contoh:

Tentukan invers dari matriks A berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Langkah 1. Mencari Determinan

Jika $det(A) = 0$ maka matriks A tidak mempunyai invers.

Kita akan mencari determinan dengan menggunakan ekspansi kolom pertama.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3)$$

$$= -1$$

Langkah 2. Mencari Minor

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -10$$

Langkah 3. Mencari Kofaktor

Menggunakan hasil dari langkah sebelumnya dan harus ingat:

$$C_{mn} = (-1)^{(m+n)} M_{mn}$$

maka

$C_{11} = (-1)^{(1+1)} M_{11} = (1)(-4) = -4$

$C_{21} = (-1)^{(2+1)} M_{21} = (-1)(-2) = 2$

$C_{31} = (-1)^{(3+1)} M_{31} = (1)(3) = 3$

$C_{12} = (-1)^{(1+2)} M_{12} = (-1)(-11) = 11$

$C_{22} = (-1)^{(2+2)} M_{22} = (1)(-6) = -6$

$C_{32} = (-1)^{(3+2)} M_{32} = (-1)(9) = -9$

$C_{13} = (-1)^{(1+3)} M_{13} = (1)(12) = 12$

$C_{23} = (-1)^{(2+3)} M_{23} = (-1)(7) = -7$

$C_{33} = (-1)^{(3+3)} M_{33} = (1)(-10) = -10$

Diperoleh kofaktor matriks $A = \begin{bmatrix} -4 & 11 & 12 \\ 2 & -6 & -7 \\ 3 & -9 & -10 \end{bmatrix}$

Langkah 4. Mencari Adjoint

Adjoint A adalah transpose dari kofaktor matriks A

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -4 & 11 & 12 \\ 2 & -6 & -7 \\ 3 & -9 & -10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 11 & -6 & -9 \\ 12 & -7 & -10 \end{bmatrix}$$

Langkah 5. Menemukan Invers

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 11 & -6 & -9 \\ 12 & -7 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$.

SIFAT-SIFAT MATRIKS

Matriks Berpangkat

- $A^0 = I$
- $A^n = A * A * A * \ldots * A \; [sebanyak\ n\ faktor]$
- $\boldsymbol{A^r} * \boldsymbol{A^s} = \boldsymbol{A^{r+s}}$
- $(\boldsymbol{A^r})^{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{A^{r*s}}$

Sifat Transpose

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A - B)^T = A^T - B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $k(A^T) = (kA)^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

SIFAT-SIFAT INVERS

- Matriks A punya invers jika dan hanya jika **|A|≠ 0**
- Jika A dan B mempunyai invers dan berukuran sama, maka AB mempunyai invers dan $\mathbf{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$
- Jika A mempunyi invers, maka:
    - $(A^{-1})^{-1} = A$
    - $(A^{n})^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^{n}$
    - Bila k adalah bilangan skalar selain 0, maka $(kA)^{-1} = k^{-1} A^{-1}$
    - $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
    - $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
    - Jika AX = B maka $X = A^{-1}B$
    - Jika XA = B maka $X = BA^{-1}$

Latihan Soal 3.2

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, maka $A^T + A^{-1}$ adalah...
2. Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$, maka matriks X yang memenuhi persamaan AX = B adalah...
3. Tentukan invers matriks berikut ini (jika ada):
   $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$
4. Tentukan invers dari $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$
5. Tentukan invers dari $\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$
6. Tentukan matriks A dari informasi berikut ini
   $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Latihan Soal Bab III

1. Tentukan determinan matriks 2x2 dibawah ini!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan determinan matriks 2x2 dibawah ini!

$$B = \begin{bmatrix} 23 & 52 \\ -40 & -46 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan determinan matriks 2x2 dibawah ini!

$$C = \begin{bmatrix} x-2 & 4 \\ 3+x & 3 \end{bmatrix}$$

4. Tentukan determinan matriks 3x3 dibawah ini dengan metode Sarrus!

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

5. Tentukan determinan matriks 3x3 dibawah ini!

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 2x & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 4x & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Tentukan determinan matriks 3x3 dibawah ini!

$$F = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 16 \\ 7 & 3 & 8 \\ 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

7. Cari x yang membuat det(G) = 0

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 2+x \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

8. Cari x yang membuat det(H) = 0

$$H = \begin{bmatrix} 4 & x-2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4-x & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

9. Cari determinan matriks ordo 4x4 dibawah ini!

$$I = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 8 \\ -4 & 8 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

10. Cari determinan matriks ordo 5×5 dibawah ini!

$$J = \begin{bmatrix} 21 & 23 & 52 & 63 & 192 \\ 45 & 22 & 122 & 135 & 168 \\ 64 & 15 & 225 & 192 & 100 \\ 82 & 67 & 194 & 246 & 101 \\ 53 & 43 & 135 & 159 & 80 \end{bmatrix}$$

11. Tentukan invers dari matriks dibawah ini!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

12. Tentukan invers dari matriks dibawah ini!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

13. Tentukan nilai X yang sesuai dengan invers

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ X & 5 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

14. Tentukan nilai *X* yang sesuai dengan invers!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & X \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

15. Tentukan invers dari matriks dibawah ini!

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

16. Tentukan invers dari matriks dibawah ini!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

17. Tentukan invers dari matriks dibawah ini!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

18. Tentukan nilai dari *X*!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & X & 7 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

19. Tentukan nilai dari *X*!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Tentukan invers dari matriks dibawah ini!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Bab IV

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

4.1. METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Pada bagian ini, kita akan mempelajari prosedur sistematis untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Prosedur ini didasarkan pada gagasan untuk melakukan operasi tertentu pada baris-baris matriks yang diperbesar (*augmented matrix*), yang disederhanakan menjadi bentuk dari solusi sistem linier.

SISTEM LINIER YANG MEMPUNYAI SOLUSI KHUSUS/UNIK

Misal *augmented matrix* untuk sistem linier dalam x_1, x_2, x_3, dan x_4 telah direduksi dengan operasi baris elementer menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi tersebut bersesuaian dengan persamaan:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Jadi, sistem linier mempunyai solusi khusus, yaitu:

$x_1 = 4, x_2 = -1, x_3 = 0$, dan $x_4 = 6$.

Contoh 1

Tentukan solusi dari sistem persamaan linier berikut ini dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Bentuk matriksnya

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_1+B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -16 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3B_1+B_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -16 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -8 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3B_2+B_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{7}{2}B_3+B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_3+B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_2+B_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang sesuai adalah

$$x_2 = 13$$

$$x_1 = -16$$

$$x_3 = 6$$

Jadi sistem linier tersebut mempunyai solusi khusus/unik, yaitu $x_1 = -16, x_2 = 13, x_3 = 6$.

SISTEM LINIER YANG MEMPUNYAI SOLUSI UMUM

Definisi

Jika sebuah sistem persamaan linier mempunyai solusi tak hingga banyak, maka himpunan persamaan parametriks dimana semua solusi bisa diperoleh dengan menetapkan nilai numerik ke parameter disebut dengan ***solusi umum*** dari sistem.

Contoh 2

Misal matriks untuk sistem linier dengan variabel x, y dan z telah direduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi berikut:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan penyelesaian masing-masing sistem linier tersebut.

Penyelesaian:

a. Baris ketiga bersesuaian dengan persamaan $0x + 0y + 0z = 1$ karena persamaan ini tidak memenuhi untuk sembarang nilai x, y dan z dan maka sistem persamaan linier tidak konsisten (tidak mempunyai solusi).

b. Baris ketiga bersesuaian dengan persamaan $0x + 0y + 0z = 0$ Persamaan tersebut dapat diabaikan atau dihilangkan karena tidak ada batasan nilai pada x, y dan z.

   Ambil baris 1 dan 2, karena x dan y bersesuaian dengan *leading one* (satu utama), maka disebut variabel *leading* (utama) sedangkan z disebut variabel bebas.

   Dari baris pertama diperoleh:

   $$x + 3z = -4$$

   $$x = -4 - 3z$$

   Dari baris kedua diperoleh:

   $$y - 5z = 2$$

   $$y = 2 + 5z$$

Misal $z = t$, maka diperoleh solusi umum berupa persamaan parametrik:

$$x = -4 - 3t$$
$$y = 2 + 5t$$
$$z = t$$

c. Abaikan atau dihilangkan baris 2 dan 3 karena tidak ada batasan nilai pada x, y dan z, kemudian ambil baris 1.

Dari baris pertama diperoleh:

$$x - 7y + z = 4$$
$$x = 4 + 7y - z$$

Misal $y = s$ dan $z = t$, maka diperoleh solusi umum berupa persamaan parametrik:

$$x = 4 + 7s - t$$
$$y = s$$
$$z = t$$

Contoh 3

Gunakan eliminasi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan sistem linier homogen berikut ini:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad + 3x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Bentuk matriks yang diperbesar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 14 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_1+B_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2B_1+B_4}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 14 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{-B_2}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 14 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-B_2+B_3}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 14 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{-4B_2+B_4}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_3B_4}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}B_3}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3B_3+B_2}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{2B_2+B_1}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang sesuai adalah

$x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0$ .... (1)

$x_3 + 2x_4 = 0$ .... (2)

$x_6 = 0$ .... (3)

Karena tidak terdapat persamaan yang bersesuaian dengan x_2, x_4, dan x_5 maka

$x_2 = r$

$x_4 = s$

$x_5 = t$

Diperoleh persamaan (1) dan (2) menjadi

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \rightarrow\ x_1 = -3r - 4s - 2t$$

$x_3 = -2x_4\ \rightarrow\ x_3 = -2s$

Jadi solusi umum yang diperoleh berupa persamaan parametrik:

$x_1 = -3r - 4s - 2t, x_2 = r, x_3 = -2s, x_4 = s, x_5 = t, x_6 = 0$

POSISI DAN KOLOM PIVOT

Posisi pivot pada matriks adalah posisi *leading one* (satu utama) setelah mereduksi baris. Dengan demikian, letak *leading one* dalam bentuk matriks eselon baris disebut ***posisi pivot***.

Contoh 4

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ telah direduksi menjadi bentuk eselon baris berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Leading one terletak pada (baris 1, kolom 1), (baris 2, kolom 3), dan (baris 3, kolom 5). Ini merupakan posisi pivot, sedangkan kolom pivotnya adalah kolom 1, 3 dan 5.

Latihan Soal 4.1

Pada Latihan nomor 1 -2 , misal matriks A merupakan *augmented matrix* untuk sistem linier dalam $x_1, x_2, x_3,$ dan x_4. Apakah penyelesaian sistem persamaan linier yang diperoleh konsisten? Jika konsisten, tentukan keunikan solusinya.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 & 60 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Dengan menggunakan eliminasi Gaussian atau Gauss-Jordan, tentukan solusi dari sistem linier berikut ini:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 15 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 6x_4 &= 6 \\ 9x_1 + 12x_2 + 4x_3 - 9x_4 &= 13 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, tentukan solusi dari Latihan nomor $4-5$:

4. $$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 + \quad 3x_3 &= -3 \\ -x_1 + 7x_2 - 11x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + \quad 7x_3 &= 3 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad - 2x_5 \qquad\qquad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 6x_6 &= -2 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad\quad - 10x_6 &= 10 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 - 4x_6 &= 2 \end{aligned}$$

6. Dengan menggunakan eliminasi Gaussian, tentukan posisi pivot pada matriks berikut ini:

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 + \qquad\quad 12x_4 &= -5 \\ -2x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + \qquad 18x_3 \qquad\quad &= 15 \end{aligned}$$

4.2. METODE INVERS MATRIKS

Kita telah mempelajari prosedur untuk menyelesaikan sistem linier berupa eliminasi Gauss–Jordan. Teorema di bawah ini memberikan rumus untuk penyelesaian sistem linier n persamaan dalam n variabel yang tidak diketahui jika matriks koefisiennya dapat diinverskan.

Teorema 4.2.1

Jika A adalah matriks $n \times n$ yang dapat diinverskan, maka untuk setiap matriks $\boldsymbol{b}$ yang berukuran $n \times 1$, sistem persamaan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mempunyai tepat satu solusi, yaitu $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Perhatikan sistem persamaan linier dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A \qquad\qquad \boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{b}$$

Jika $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ maka $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$., asalkan memenuhi kondisi:

a. A adalah matriks persegi

b. A bukan matriks singular (det ≠ 0)

Keuntungan menggunakan metode invers dalam menyelesaikan sistem linier adalah x dapat dicari untuk setiap $\boldsymbol{b}$ yang berbeda dengan A^{-1} yang sama.

Contoh

Tentukan solusi dari sistem persamaan linier berikut ini dengan menggunakan metode invers:

$$\begin{cases} a - 3c = 4 \\ a - b = -1 \\ b - 2c = 2 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Bentuk matriks yang diperoleh adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Misal: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Mencari determinan matriks A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Karena determinan matriks $A \neq 0$ maka kita dapat mencari matriks A^{-1}, yaitu

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ berbentuk

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi sistem persamaan linier tersebut adalah $a = -5, b = -4$, dan $c = -3$.

Latihan Soal 4.2

1. Dengan menggunakan metode invers, tentukan solusi dari:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

   a. $b_1 = -1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1$
   b. $b_1 = 0,\ b_2 = -1,\ b_3 = -1$
   c. $b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0$

2. Dengan menggunakan metode invers, tentukan solusi dari:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} &= b_1 \\ -1x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} &= b_2 \\ x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} + x_4 &= b_3 \\ -1x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

   a. $b_1 = 2,\ b_2 = 2,\ b_3 = -4,\ b_4 = 1$
   b. $b_1 = 2,\ b_2 = -2,\ b_3 = 4,\ b_4 = 1$
   c. $b_1 = 6,\ b_2 = -2,\ b_3 = 4,\ b_4 = 0$

Dengan menggunakan metode invers, tentukan solusi dari Latihan nomor 3 - 4:

3. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 9x_3 &= -8 \\ 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 \quad\quad + 2x_4 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= -3 \\ x_1 \quad - x_3 \quad\quad &= 0 \end{aligned}$$

5. Dengan menggunakan metode invers, tentukan nilai x_1, x_2 dan x_3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

6. Dengan menggunakan metode invers, tentukan nilai x_1, x_2, x_3 dan x_4.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.3. METODE CRAMER

Teorema selanjutnya menggunakan rumus invers dari sebuah matriks yang dapat diinverskan, berupa rumus yang disebut dengan ***Metode Cramer***, untuk solusi sistem linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dari *n* persamaan dalam *n* variabel yang tidak diketahui dimana koefisien matriks A dapat diinverskan (atau det ≠ 0).

Teorema 4.3.1

Jika $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ adalah sistem dari *n* persamaan linier dalam *n* variabel yang tidak diketahui sedemikian sehingga det ≠ 0, maka sistem memiliki solusi khusus. Solusi tersebut adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dimana A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri matriks A pada kolom ke-*j* dengan entri-entri matriks:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh

Carilah penyelesaian sistem linier berikut ini dengan menggunakan metode Cramer:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= -4 \\ -\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Bentuk matriksnya

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad\qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Mencari determinan matriks A:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -4$$

Kemudian, matriks A_1 diperoleh dari mengganti kolom pertama pada A dengan matriks $\boldsymbol{b}$, maka determinan matriks A_1:

$$\det(A_1) = |A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \\ 8 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -192$$

Lalu, matriks A_2 diperoleh dari mengganti kolom kedua pada A dengan matriks $\boldsymbol{b}$, maka determinan matriks A_2:

$$\det(A_2) = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & -4 & -6 \\ -1 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -14$$

Selanjutnya, matriks A_3 diperoleh dari mengganti kolom ketiga pada A dengan matriks $\boldsymbol{b}$, maka determinan matriks A_3:

$$\det(A_3) = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 84$$

Solusi sistem linier dengan menggunakan metode Cramer:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-192}{-4} = 48$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-14}{-4} = \frac{7}{2}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{84}{-4} = -21$$

Jadi, solusi sistem persamaan linier tersebut adalah $x_1 = 48, x_2 = \frac{7}{2}$, dan $x_3 = -21$.

Latihan Soal 4.3.

1. Carilah penyelesaian sistem linier berikut ini dengan menggunakan metode Cramer:

$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= -3 \end{aligned}$$

2. Carilah nilai y pada sistem persamaan linier berikut ini dengan menggunakan medote Cramer

$$\begin{aligned} 4x + y + z + w &= 6 \\ 3x + 7y - z - w &= 1 \\ 7x - 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + y + z - 2w &= 3 \end{aligned}$$

3. Carilah nilai x_3 pada sistem persamaan linier berikut ini dengan menggunakan medote Cramer

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 &= -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

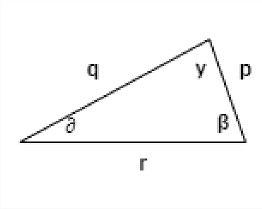
4. Dengan menggunakan metode Cramer, tentukan nilai x_1, x_2 dan x_3.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

5. Dengan menggunakan metode Cramer, tentukan x_1, x_2, x_3 dan x_4.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Perhatikan gambar di bawah ini!



Jika diketahui:

$q \cos \gamma + r \cos \beta = p$

$r \cos \alpha + p \cos \gamma = q$

$p \cos \beta + q \cos \alpha = r$

Gunakan metode Cramer untuk membuktikan: $\cos \beta = \frac{p^2+r^2-q^2}{2pr}$

4.4. ITERASI JACOBI

Metode iterasi jacobi merupakan salah satu metode tak langsung yang dapat digunakan untuk menemukan solusi dari suatu sistem persamaan linier. Metode ini jarang digunakan pada sistem persamaan linier dengan ukuran kecil. Hal ini dikarenakan metode langsung seperti metode Gaussian dan lainnya jauh lebih efisien. Namun, pada sistem persamaan linier berukuran besar, metode iterasi ini jauh lebih efisien daripada metode langsung dalam hal penggunaan memori komputer maupun waktu komputasi. Metode *iterasi Jacobi*, prinsipnya: merupakan metode iteratif yang melakukan pembaharuan nilai x yang diperoleh di setiap iterasinya.

Pada sistem persamaan linier :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Suatu persamaan linier yang hendak diselesaikan dengan menggunakan metode iterasi Jacobi harus memenuhi syarat nilai elemen diagonal utama matriks harus lebih dominan. Maksudnya adalah nilai absolut diagonal utama matriks harus lebih besar dari jumlah nilai absolut elemen matriks lainnya pada satu baris.

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ket : i baris dan j kolom

Misal,

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + a_{1n}$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + a_{2n} \quad \text{dst}$$

Untuk memenuhi syarat tersebut, kita dapat memodifikasi dengan mengubah posisi persamaaan agar menjadi dominan diagonal.

Berikut ini adalah tahapan dalam proses menentukan solusi sistem persamaan linier dengan metode iterasi Jacobi.

1. Pada tahapan ini, kita akan menentukan penyelesaian dari setiap persamaan.

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n)$$
$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n)$$
$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right),\ m=n$$

2. Tentukan nilai awal untuk $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yaitu $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$.

3. Kemudian temukan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang baru dengan mensubtitusikan pada langkah 1.

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - \ldots - a_{1n}\, x_n^{(0)}\right)$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\, x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(0)}\right)$$

.
.
.

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_m - a_{m1}x_1^{(0)} - a_{m2}x_2^{(0)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)}\right)$$

4. Kemudian dengan menggunakan $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - \ldots - a_{1n}\, x_n^{(1)}\right)$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\, x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(1)}\right)$$

.
.
.

$$x_n^{(2)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_m - a_{m1}x_1^{(1)} - a_{m2}x_2^{(1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)}\right)$$

5. Ulangi proses yang sama sehingga nilai iterasi ke – r adalah $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}$

$$x_1^{(r+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(r)} - a_{13}x_3^{(r)} - \ldots - a_{1n}\, x_n^{(r)}\right)$$

$$x_2^{(r+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\, x_1^{(r)} - a_{23}x_3^{(r)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(r)}\right)$$

.
.
.

$$x_n^{(r+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_m - a_{m1}x_1^{(r)} - a_{m2}x_2^{(r)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(r)}\right)$$

Iterasi tersebut terus dilakukan hingga mencapai nilai yang konvergen.

Contoh :

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metoda Gauss-Jacobi

$$27x + 6y - z = 85$$

$$6x + 15y + 2z = 72$$

$$x + y + 54z = 110$$

Penyelesaian :

Untuk menerapkan metode ini, pertama harus dicek bahwa Sistem persamaan linier tersebut dominan secara diagonal.

|27| > |6| + |1 |

|15 |> |6|+ |2|

|54| > |1| + |1|

Dari pengecekan tampak bahwa sistem persamaan linier tersebut dominan secara diagonal sehingga metode iterasi dapat diterapkan.

$$x = \frac{1}{27}(85 - 6y + z)$$
$$y = \frac{1}{15}(72 - 6x - 2z)$$
$$z = \frac{1}{54}(110 - x - y)$$

Iterasi pertama: dimulai dengan x = y = z = 0

$$x^{(1)} = \frac{85}{27} = 3.14815$$
$$y^{(1)} = \frac{72}{15} = 4.8$$
$$z^{(1)} = \frac{110}{54} = 2.03704$$

Iterasi kedua gunakan nilai $x^{(1)} = 3.14815$, $y^{(1)} = 4.8$, $z^{(1)} = 2.03704$ didapatkan

$$x^{(2)} = \frac{1}{27}(85 - 6(4.8) + 2.03704) = 2.15693$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{15}\big(72 - 6(3.14815) - 2(2.03704)\big) = 3.26913$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{54}(110 - 3.14815 - 4.8) = -0.515$$

Lanjutkan iterasi sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

Iterasi ke	x	y	z
3	2.49167	3.68525	1.93655
4	2.40093	3.54513	1.92265
5	2.43155	3.58327	1.92692
6	2.42323	3.57046	1.92565
7	2.42603	3.57395	1.92604
8	2.42527	3.57278	1.92593

9	2.42552	3.57310	1.92596
10	2.42546	3.57300	1.92595

Dari table di atas, iterasi ke-9 dan 10 bernilai sama dengan mempertimbangkan empat angka di belakang koma atau dapat dikatakan bahwa nilai sudah konvergen sehingga solusi persamaan tersebut adalah:

$$x = 2.4255 \; y = 3.5730 \; z = 1.9260.$$

Latihan Soal 4.4.

Dari nomor 1 - 3,Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier berikut dengan menggunakan metode iterasi Jacobi.

1. $8x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 25$
   $2x_1 + 10 - 2x_3 = 20$
   $x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 30$

2. $8x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6$
   $-4x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 18$
   $-2x_1 + 2x_2 + 14x_3 = -12$

3. $9x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -4$
   $3x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 5$
   $x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0$

Dari sistem persamaan linier pada nomor 4 – 6 di bawah ini, apakah dapat diselesaikan dengan metode iterasi jacobi? Jelaskan alasannya.

4. $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$
   $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$
   $3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$

5. $d - e + 2f - g = -1$
   $2d + e - 2f - 2g = -2$
   $-d + 2e - 4f + g = 1$
   $3d - 3e = -3$

6. $3p - q - r = 1$
   $-p + 3q + r = 3$
   $2p + q + 4r = 7$

4.5. ITERASI GAUSS SEIDEL

Metode Gauss Seidel merupakan salah satu metode tak langsung dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Metode ini merupakan pengembangan dari metoda Gauss-Jacobi. Untuk menyelesaikan persamaan linier dengan metoda ini, syarat yang harus dipenuhi sama dengan syarat pada metoda Gauss-Jacobi serta menggunakan tahapan yang hampir sama dengan metode Gauss Jacobi.

Contoh :

Tinjau tiga sistem persamaan linier tiga varibel

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

1. Sistem persamaan linier yang diketahui harus dominan secara diagonal.
2. Tentukan rumus untuk x_1, x_2, x_3 yaitu

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$
$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2),$$

3. Tentukan nilai awal untuk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yaitu $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$.
4. Kemudian temukan nilai $x_1^{(1)}$ yaitu

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right)$$

Kemudian temukan nilai $x_2^{(1)}$ dengan menggunakan nilai baru $x_1^{(1)}$ dan $x_3^{(0)}$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}\right)$$

Dengan cara yang sama, temukan $x_3^{(1)}$ menggunakan $x_1^{(1)}$dan $x_2^{(1)}$ yaitu

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}\right)$$

5. Dengan menggunakan $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ yang baru, dapat dilakukan iterasi berikutnya

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)}\right)$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(2)} - a_{23}x_3^{(1)}\right)$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(2)} - a_{32}x_2^{(2)}\right)$$

6. Ulangi proses dengan tahapan yang sama, sehingga nilai iterasi ke – r adalah $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$

$$x_1^{(r+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(r)} - a_{13}x_3^{(r)}\right)$$

$$x_2^{(r+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(r+1)} - a_{23}x_3^{(r)}\right)$$

$$x_3^{(r+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(r+1)} - a_{32}x_2^{(r+1)}\right)$$

Tahapan ini terus dilakukan hingga mendapatkan nilai yang konvergen.

Contoh :

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metoda Gauss-Seidel

$$10x - 5y - 2z = 3$$
$$4x - 10y + 3z = -3$$
$$x + 6y + 10z = 3$$

Penyelesaian :

Untuk menerapkan metode ini, sistem persamaan linier tersebut harus dominan secara diagonal

$$|10| > |5| + |2|$$
$$|10| > |4| + |3|$$
$$|10| > |1| + |6|$$

Dari pengecekan tampak bahwa sistem persamaan linier tersebut sudah dominan secara diagonal sehingga dapat dilanjutkan ke tahapan iterasi.

$$x = \frac{1}{10}(3 + 5y + 2z)$$
$$y = \frac{1}{10}(3 + 4x + 3z)$$
$$z = \frac{1}{10}(-3 - x - 6y)$$

Iterasi pertama dimulai dengan menerapkan nilai awal x=y=z=0

Menentukan $x^{(1)} = \frac{3}{10} = 0.3$

Menggunakan nilai x yang baru untuk menentukan $y^{(1)}$

$$y^{(1)} = \frac{1}{10}(3 + 4(0.3) + 3(0)) = 0.42$$

Menggunakan nilai $x^{(1)} = 0.3$ dan $y^{(1)} = 0.42$ untuk menentukan $z^{(1)}$

$$z^{(1)} = \frac{1}{10}(-3 - 0.3 - 6(0.42)) = -0.582$$

Melakukan iterasi kedua dengan menggunakan $y^{(1)}$ dan $z^{(1)}$ untuk menentukan $x^{(2)}$.

$$x^{(2)} = \frac{1}{10}(3 + 5(0.42) + 2(-0.582)) = 0.3936$$

Gunakan $x^{(2)}$ dan $z^{(1)}$ untuk menentukan $y^{(2)}$

$$y^{(2)} = \frac{1}{10}(3 + 4(0.3936) + 3(-0.582)) = 0.28284$$

Gunakan $x^{(2)}$ dan $y^{(2)}$ untuk menentukan $z^{(2)}$

$$z^{(2)} = \frac{1}{10}(-3 - 0.3936 - 6(0.28284)) = -.0.509064$$

Lakukan iterasi selanjutnya hingga nilai nya konvergen

Iterasi ke	x	y	z
3	0.3396072	0.28312368	-0.503834928
4	0.34079485	0.28416746	-0.505157996
5	0.3415547	0.28506792	-0.505196229
6	0.3414947	0.2850390	-0.5051728
7	0.3414849	0.28504212	-0.5051737

Sehingga, solusinya adalah $x = 0.341$, $y = 0.285$, $z = -0.505$

Latihan Soal 4.5

1. Selesaikan persamaan berikut dengan metode Gauss Seidel

   10a – 5b – 2c = 3
   4a – 10b + 3c = −3
   a + 6b + 10c = 3

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari SPL di bawah ini dengan metode iterasi gauss seidel dengan galat toleransi (0,005)

$$\begin{cases} 3a - 8b + 4c = 0 \\ 10a - 6b - 2c = 1 \\ 5a + 3b + 11c = -2 \end{cases}$$

3. Tentukan himpunan penyelesaian SPL berikut dengan metode iterasi gauss seidel dengan galat toleransi (0,05)

   3a + b – c = 10
   a + 4b + 2c = 5
   -a + 2b + 5c = 8

4. Tentukan himpunan penyelesaian SPL berikut dengan metode iterasi gauss seidel dengan galat toleransi (0,00002)

$$10p - 2q - r - s = 3$$
$$-2p + 10q - r - s = 15$$
$$-p - q + 10r - 2s = 27$$
$$-a - b - 2c - 10d = -9$$

5. Apakah SPL berikut dapat diselesaikan dengan metode gauss seidel? Jelaskan

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9$$
$$x_1 - 2x_3 + 7x_4 = 11$$
$$3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 8$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 10$$

Latihan Soal Bab IV

1. Misal matriks C di bawah ini merupakan *augmented matrix* untuk sistem linier dalam x_1, x_2, x_3, dan x_4. Apakah penyelesaian sistem persamaan linier yang diperoleh konsisten? Jika konsisten, tentukan keunikan solusinya

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, tentukan solusi dari:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 - 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 29 \end{aligned}$$

3. Dengan menggunakan eliminasi Gaussian atau Gauss-Jordan, tentukan solusi dari sistem linier berikut ini:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 6x_2 + \qquad\quad 12x_4 &= -6 \\ -9x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 8x_4 &= \ \ 3 \\ 7x_1 + \qquad\quad 5x_3 + \ \ 5x_4 &= -2 \end{aligned}$$

4. Dengan menggunakan eliminasi Gaussian atau Gauss-Jordan, tentukan solusi dari sistem linier berikut ini:

$$\begin{aligned} x_1 - \quad x_2 + 3x_3 + \quad 2x_4 &= 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \quad 4x_4 &= 4 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 10x_4 &= 3 \\ 7x_1 - 5x_2 + \quad x_3 - \quad 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

5. Dengan menggunakan metode invers, tentukan solusi dari:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad x_2 + x_3 &= b_1 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 &= b_2 \\ -x_1 + 5x_2 \qquad &= b_3 \end{aligned}$$

   a. $b_1 = 5,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0$
   b. $b_1 = 5,\ b_2 = -5,\ b_3 = 1$
   c. $b_1 = 1,\ b_2 = -2,\ b_3 = 1$

6. Dengan menggunakan metode invers, tentukan solusi dari:

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 \qquad\quad - \ x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad\quad - \ x_4 &= 1 \\ -3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + \ \ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

7. Dengan menggunakan metode invers, tentukan nilai x_1, x_2 dan x_3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

8. Dengan menggunakan metode invers, tentukan solusi dari:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 \qquad &= 3 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$

9. Carilah penyelesaian sistem linier berikut ini dengan menggunakan metode Cramer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1 \\ -2x_1 \qquad + x_3 &= -3 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

10. Carilah penyelesaian sistem linier berikut ini dengan menggunakan metode Cramer:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

11. Dengan menggunakan metode Cramer, tentukan nilai x_1, x_2 dan x_3.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

12. Dengan menggunakan metode Cramer, tentukan x_1, x_2, x_3 dan x_4.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

13. Carilah penyelesaian sistem linier berikut ini dengan menggunakan metode Gauss Seidel

$$\begin{aligned} 45x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 58 \\ -3x_1 + 22x_2 + 2x_3 &= 47 \\ 5x_1 + x_2 + 20x_3 &= 67 \end{aligned}$$

14. Carilah penyelesaian sistem linier berikut ini dengan menggunakan metode Gauss Seidel

$$\begin{aligned} 9x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 + 12x_2 + 9x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 14x_3 &= 1 \end{aligned}$$

15. Carilah penyelesaian sistem linier berikut ini dengan menggunakan metode Gauss Seidel

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 3\,x_1 + 8x_2 - 2x_3 &= -25 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

16. Carilah penyelesaian sistem linier berikut ini dengan menggunakan metode Jacobi

$$\begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 25 \\ 2\,x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 20 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 30 \end{aligned}$$

17. Carilah penyelesaian sistem linier berikut ini dengan menggunakan metode Jacobi

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 &= -25 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

18. Carilah penyelesaian sistem linier berikut ini dengan menggunakan metode Jacobi

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 &= -25 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Bab V
RUANG VEKTOR EUCLIDEAN

5.1. PENGANTAR VEKTOR

Definisi

Vektor dapat dituliskan dalam huruf kecil tebal misal $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x},$ dll. Sebuah vektor v dengan komponen- (berdimensi – n) di dalam R^n adalah suatu aturan tupel-n dari bilangan-bilangan yang ditulis sebagai baris ($v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$) atau sebagai kolom $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ dengan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah bilangan – bilangan real dan dinamakan komponen dari vektor v.

Sehingga di R^2 vektor dapat ditulis v = (v_1, v_2) atau v = $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dan di R^3 vektor dapat dituliskan v = (v_1, v_2, v_3) atau v = $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

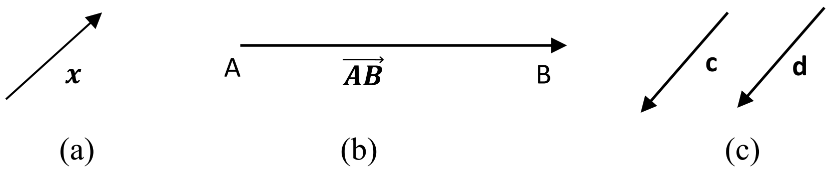
VEKTOR SECARA GEOMETRIS

Secara geometris vektor bisa disajikan sebagai ruas garis berarah atau anak panah dalam ruang berdimensi-2 dan ruang berdimensi 3 dimana arah anak panah menentukan arah dari vektor dan panjang panah menentukan besar vektor. Ekor panah dinamakan titik awal dan ujung panah dinamakan titik ujung. (gambar 2a.)

Komponen vektor menentukan besar dan arah vektor, misalkan pada R^2, vektor v = (2,1) artinya dari titik awal bergerak 2 satuan ke kanan kemudian 1 satuan ke ke atas. Pada R^3, misal diketahui vektor w = (2,4,-

1) artinya dari titik awal bergerak 2 satuan ke depan (x- positif), 4 satuan ke kanan (y positif) dan 1 satuan ke bawah (z-negatif).

Alternatif yang lain, vektor juga bisa dituliskan melalui titik-titik yang dihubungkan ruas garis misalnya $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (jika vektor berawal dari titik A dan berakhir pada titik B)



Gambar 5.1.1 Contoh Vektor

VEKTOR YANG EKUIVALEN

Vektor yang panjang dan arahnya sama disebut ekuivalen (gambar 5.1.1c) meskipun vektor- vektor tersebut terletak pada posisi yang berbeda. Jika **c** dan **d** ekuivalen maka bisa dituliskan

$$\mathbf{c} = \mathbf{d}$$

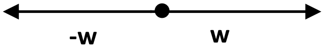
VEKTOR NOL

Vektor yang tidak mempunyai panjang dan arah disebut vektor nol dan dinyatakan dengan 0 dimana bisa didefinisikan

$$0 + w = w + 0$$

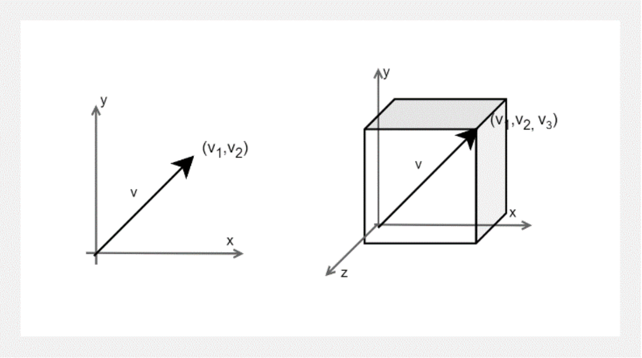
VEKTOR NEGATIF

Jika v adalah sebarang vektor tak nol maka **-w**, negatif dari **w**, didefinisikan sebagai vektor yang besarnya sama dengan **w**, tetapi arahnya terbalik (gambar 5.1.2)



Gambar 5.1.2 vektor negatif

VEKTOR DALAM SISTEM KOORDINAT



Gambar 5.1.3 Vektor dalam ruang dua dimensi dan tiga dimensi

Dalam ruang dimens dua dan tiga , misalkan v adalah vektor sebarang pada suatu bidang dan asumsikan sebagaimana tampak pada gambar 5.1.3 bahwa v ditempatkan sedimikian rupa sehingga titik awalnya berhimpitan dengan titik asal sistem koordinat siku-siku maka koordinat -koordinat titik akhirnya disebut komponen-komponen v. Kita dapat menuliskan $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ untuk menunjukkan bahwa sebuah vektor v dalam ruang diminensi 2 dengan komponen (v_1, v_2) dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_{3,})$ untuk menunjukkan sebuah vektor v dalam ruang dimensi 3 dengan komponen $(v_1, v_2, v_{3,})$

Dalam ruang dimens dua dan tiga , misalkan v adalah vektor sebarang pada suatu bidang dan asumsikan sebagaimana tampak pada gambar 5.1.3 bahwa v ditempatkan sedimikian rupa sehingga titik awalnya berhimpitan dengan titik asal sistem koordinat siku-siku maka koordinat -koordinat titik akhirnya disebut komponen-komponen v. Kita dapat menuliskan $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ untuk menunjukkan bahwa sebuah vektor v dalam ruang diminensi 2 dengan komponen (v_1, v_2) dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_{3,})$ untuk menunjukkan sebuah vektor v dalam ruang dimensi 3 dengan komponen $(v_1, v_2, v_{3,})$

VEKTOR DENGAN TITIK PANGKAL TIDAK PADA (0,0)

Jika $P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$ adalah titik – titik pada ruang berdimensi 2 maka komponen – komponen $\overrightarrow{P_1P_2}$ diperoleh dengan mengurangkan koordinat-koordinat pada titik ujung dengan koordinat pada titik pangkal yaitu

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Demikian untuk ruang berdimensi 3. Jika $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan $P_2(x_2,y_2,z_2)$ adalah titik – titik pada ruang berdimensi 3, maka maka komponen – komponen $\overrightarrow{P_1P_2}$ adalah

Latihan Soal 5.1

1. Gambarlah sketsa dari vektor -vektor berikut dimana titik awalnya terletak pada titik asal
   a. $w_1 = (2,5)$
   b. $w_2 = (-4,7)$
   c. $w_3 = (2,3,5)$
   d. $w_4 = (1,1,-4)$
2. Tentukan komponen – komponen vektor dengan titik awal P_1 dan titik akhir P_2
   a. P_1 (5,2), P_2(3,7)
   b. P_1 (3,-5), P_2(-4,-7)
3. Tentukan komponen – komponen vektor dengan titik awal P_1 dan titik akhir P_2
   a. P_1 (3,-7,2), P_2(-2,5,-4)
   b. P_1 (-1,0,2), P_2(0,-1,0)
4. Temukan titik akhir (ujung) vektor yang ekuivalen dengan vektor u = (2,4) dan titik pangkal vektor adalah B (2,2).
5. Temukan titik pangkal vektor yang ekuivalen dengan vektor u = (2,2,6) dan titik pangkal vektor adalah B (4,7,9).
6. Tentukan suatu vektor tak nol **w** dengan titik awal A(-2,6,-10) sedemikian rupa sehingga vektor **w** memiliki arah yang sama dengan **u** = (12,14,-6)

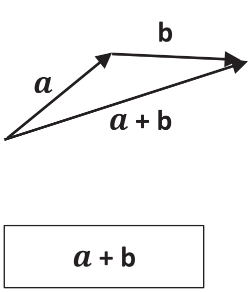
5.2. NORMA VEKTOR DAN ARITMATIKA VEKTOR

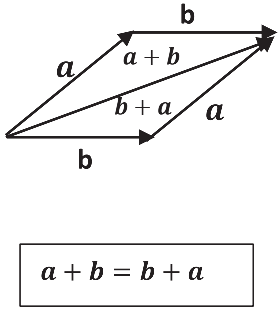
PENJUMLAHAN VEKTOR

Diberikan vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektor -vektor di R^3 maka penjumlahan $\boldsymbol{a}$ *dan* $\boldsymbol{b}$ didefinisikan oleh

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Definisi secara geometris, Jika $\boldsymbol{a}$ dan **b** adalah dua vektor sebarang maka jumlah $\boldsymbol{a}$ + **b** adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut : letakkan vektor w sedemikian sehingga titik pangkalnya bertautan dengan titik ujung **b**. Vektor $\boldsymbol{a}$ +**b** disajikan oleh panah dari titik pangkal $\boldsymbol{a}$ ke titik ujung **b** seperti pada gambar 5.2.1





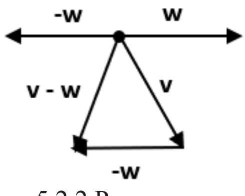
(a) (b)

Gambar 5.2.1 Ilustrasi Penjumlahan Vektor

PENGURANGAN VEKTOR

Jika v dan w adalah dua vektor sebarang, maka selisih w dari v didefinisikan sebagai v – w = v + (-w) seperti pada gambar 5.2.2 sehingga misal vektor **v** = (v_1, v_2, v_3) dan w = (w_1, w_2, w_3) maka pengurangan v oleh w dapat didefinisikan sebagai

$$v - w = v + (-w) = [v_1 + (-w_1), v_2 + (-w_2), v_3 + (-w_3)]$$



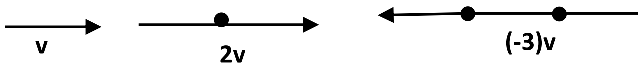
Gambar 5.2.2 Pengurangan vektor

PERKALIAN SUATU VEKTOR DENGAN SKALAR

Definisi

Jika **v** adalah suatu vektor tak nol dan k adalah suatu bilangan real tak nol (scalar) maka hasil kali **kv** didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya |k| kali panjang **v** dan yang arahnya sama dengan arah **v** jika k > 0 dan berlawanan arah dengan **v** jika k < 0 seperti yang tampak pada ilustrasi gambar 5.2.3. Didefinisikan **kv** = 0 jika **k** = 0 atau **v** = 0

Contoh



Gambar 5.2.3 Ilustrasi perkalian vektor

SIFAT -SIFAT OPERASI VEKTOR

Jika u, v dan w adalah vektor – vektor pada bidang R^2 atau pada ruang R^3, c dan k adalah skalar – skalar maka berlaku :

a) u + v = v + u
b) (u + v) + w = u + (v + w)
c) u + 0 = 0 + u
d) u – u = u + (-u) = 0
e) 1u = u
f) ck(u) = c(ku) = k(cu)
g) (c+k)u = cu + ku
h) k(u+v) = ku+kv

PANJANG/ NORMA VEKTOR

Panjang sebuah vektor dikenal juga dengan istilah norma vektor dan dilambangkan dengan $\|v\|$. Sesuai dengan teorema Pythagoras, norma sebuah vektor baik pada R^2 dan R^3 adalah sebagai berikut:

Jika v adalah vektor pada R^2 maka

$$\|v\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$$

Jika v adalah vektor pada R^3 maka

$$\|v\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$$

Contoh :

Diketahui u = (3, 5 , 10) maka $\|u\| = \sqrt{9+25+100} = \sqrt{134}$

VEKTOR SATUAN

Sebuah vektor dengan norma 1 merupakan vektor satuan.
Vektor satuan yang sama arahnya dengan v : $u = \frac{1}{\|v\|}v$

VEKTOR SATUAN STANDAR

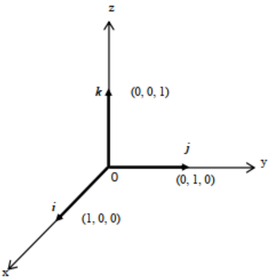
Vektor satuan standar adalah vektor satuan pada arah positif dari sumbu koordinat

Untuk R^2, vektor basis ditulis : i = (1,0) dan j = (0,1)

Untuk R^3, vektor basis ditulis : i = (1,0,0), j = (0,1,0) dan k = (0,0,1) Lihat (gambar 5.2.4)

Dengan demikian setiap vektor v = (v_1, v_2, v_3) di R^3 dapat ditulis

v = $(v_1, v_2, v_3) = \ v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = \ v_1\,\boldsymbol{i} + \ v_2\,\boldsymbol{j} + v_3\,\boldsymbol{k}$



Gambar 5.2.4 Vektor Satuan Standar

Contoh :

Nyatakan v = (1,-3,4) dalam vektor basis

Penyelesaian :

v = (1,-3,4) = 1(1,0,0) + (-3)(0,1,0) + 4(0,0,1) = 2i – 3j – 4k

JARAK ANTARA DUA TITIK

Jika $P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$ adalah titik – titik pada ruang berdimensi 2, maka jarak antara dua titik tersebut adalah norma dari vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ karena

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ maka}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demikian untuk ruang berdimensi 3. Jika $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan $P_2(x_2,y_2,z_2)$ adalah titik – titik pada ruang berdimensi 3, maka jarak antara dua titik tersebut adalah norma dari vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ karena

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \text{ maka}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Contoh :

Diketahui vektor v = $\overrightarrow{P_1P_2}$ dengan titik pangkal $P_1(2,-1,-5)$ dan titik ujung $P_2(4,-3,1)$. Tentukan komponen vektor v dan jarak antara dua titik tersebut.

Penyelesaian :

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$= \left(4 - 2, -3 - (-1), 1 - (-5)\right) = (2, -2,6)$$

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

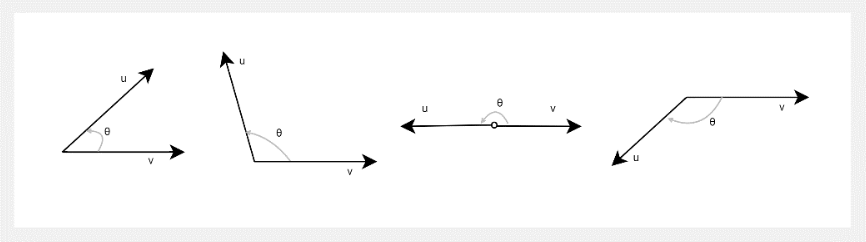
Latihan Soal 5.2

1. Tentukan norma dari w
   a. w = (-5,3)
   b. v = (-6,3,-2)
2. Tentukan jarak antara P_1 dan P_2
   a. $P_1(-2,7);P_2(3,-6)$
   b. $P_1(2,2,1);P_2(8,0,4)$

3. Misalkan **p** = (-6, 2, 4), **q** = (6, 2, 10) and **r** = (7, -2, -5).
   a. Tentukan komponen dari 4(**q** – 3**p**)
   b. Tentukan komponen vektor **x** yang memenuhi 3**p** + **q** - **x** = 5**p** + **2q**
   c. Tentukan skalar a, b, c sehingga a**p** - 2b**q** + c**r** = (-38, 4, -2)
4. Misalkan p = (1,-3,5), q = (2,-6,4), dan r = (4,5,-3). Hitunglah
   a. $\|p\| + \|r\|$
   b. $\|q + r\|$
   c. $\|-4p + 2q + 3r\|$
5. Misal **v** = (-1, 2, 5), Tentukan semua nilai k sehingga $\|kv\| = 4$

5.3. PERKALIAN TITIK PADA VEKTOR

Anggap u dan v adalah dua vektor tak nol dalam R^2 atau R^3, dan anggap vektor – vektor ini sudah diposisikan sehingga titik – titik pangkalnya berimpitan seperti tampak pada gambar 5.3.1. Sudut antara u dan v adalah sudut θ yang ditentukan oleh u dan v yang memenuhi $0 \le \theta \le \pi$



Gambar 5.3.1 Ilustrasi perkalian titik

Definisi

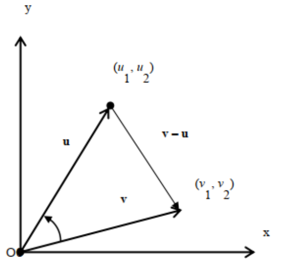
Jika u dan v adalah vektor – vektor dalam R^2 atau R^3 dan θ adalah sudut antara u dan v maka HASIL KALI TITIK atau dikenal DOT PRODUCT didefinisikan sebagai

$$u\,.\,v = \begin{cases} |u||v|\cos\theta & jika\; u \neq 0\; dan\; v \neq 0 \\ 0 & jika\; u = 0\; atau\; v = 0 \end{cases}$$

Perkalian titik (Dot Product) menghasilkan skalar

Contoh : misalkan u =(0,0,1) dan v =(0,2,2) sedangkan sudut diantara u dan v adalah 45⁰ maka

$$u.v = \|u\|\|v\| \cos 45°$$
$$= \left(\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\right)\left(\sqrt{0^0 + 2^2 + 2^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 2$$



Gambar 5.3.2 Bentuk komponen dari hasil kali titik

Dari gambar 5.3.2 kita dapat menghubungkan antara definisi perkalian titik dengan aturan cosinus berikut ini

$$\cos\theta = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2}{2\|u\|\|v\|}$$

$$2\|u\|\|v\|\cos\theta = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2$$

$$\cos\theta = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2}{2\|u\|\|v\|}$$

$$2\|u\|\|v\|\cos\theta = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2$$

$$= u_1{}^2 + u_2{}^2 + v_1{}^2 + v_2{}^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2$$

$$= u_1{}^2 + u_2{}^2 + v_1{}^2 + v_2{}^2 - v_1{}^2 - u_1{}^2 - v_2{}^2 - u_2{}^2 + 2u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

$$= 2u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

$$\|u\|\|v\|\cos\theta = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Sudah kita ketahui sebelumnya bahwa

$u\,.\,v = \|u\|\|v\|\cos\theta$ sehingga alternatif lain untuk perkalian titik/ dot product dapat kita definisikan sebagai berikut

Perkalian titik dua buah vektor di R^2 adalah

$$u.v = u_1\,v_1 + u_2\,v_2$$

Perkalian titik dua buah vektor di R^3 adalah

$$u.v = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3$$

Teorema 5.3.1

SUDUT ANTARA DUA VEKTOR

Jika u dan v adalah vektor – vektor tak nol dan θ adalah besar sudut diantara kedua vektor tersebut maka

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$$

θ lancip ($0^0 < \theta < 90^0$) jika dan hanya jika u . v > 0

θ tumpul ($90^0 < \theta < 180^0$) jika dan hanya jika u . v < 0

θ siku – siku ($\theta = 90^0$) jika dan hanya jika u . v = 0

Kita tahu jika dua buah vektor membentuk sudut $\theta = 90^0$ berarti vektor tersebut saling tegak lurus atau ortogonal. Sehingga dapat disimpulkan bahwa

Jika u . v = 0 maka u dan v saling tegak lurus atau ortogonal.

Contoh :

Perhatikan vektor – vektor u = (2,-1,1) dan v =(1,1,2). Tentukan u.v dan sudut antara u dan v

Penyelesaian :

$$u.v = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

Untuk vektor-vektor tersebut kita memperoleh sehingga dapat kita peroleh $\|u\| = \|v\| = \sqrt{6}$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \text{ maka } \theta = 60^0$$

Teorema 5.3.2

SIFAT – SIFAT HASIL KALI TITIK

Jika u, v dan w adalah vektor – vektor pada R^2 dan R^3 dan k adalah skalar maka

1. **u.v** = **v.u**
2. **u . (**v+**w)** = **u.v** + **u.w**
3. k(**u.v**) = (k**u**).**v**
4. **v.v > 0** jika **v** $^1\neq 0$, dan **v.v =** 0 jika **v** = 0
5. **0.v** = **v.0=0**
6. (**u**+**v**).**w**=**u.w**+**v.w**
7. **u.**(**v-w**)=**u.v-u.w**
8. (**u-v**).**w**=**u.w-v.w**
9. k(**u.v**) =**u.**(k**v**)

Latihan Soal 5.3

1. Tentukan nilai dari u.v, jika diketahui sebagai berikut
   a. u = (2,-4) dan v = (3,5)
   b. u = (3,-2,0) dan v = (2,-6,1)
2. Dari u dan v pada nomor 1 tentukan nilai cosinus dari sudut antara dua vektor tersebut.
3. Misalkan u = (3,-4), v = (2,-2) dan w =(8,2). Tentukan nilai dari
   a. u . (2v + w)
   b. || (v . w) v||
   c. ||v|| (u . w)

4. Pakailah vektor – vektor berikut untuk mencari cosinus dari sudut-sudut bagian dalam segitiga dengan titik – titik sudut (0,-1), (1,-2) dan (4,1).
5. Buktikan bahwa titik sudut segitiga berikut P(3,0,2), Q (4,3,0) dan R(8,1,-1) merupakan titik sudut segitiga sama kaki. Pada sudut manakah sudut yang sama kaki?

5.4. PERKALIAN SILANG PADA VEKTOR

Pada materi sebelumnya kita sudah mempelajari hasil kali titik dimana akan menghasilkan suatu skalar. Pada sub materi ini akan dibahas jenis perkalian vektor yang menghasilkan suatu vektor juga, namun hanya dapat diterapkan pada ruang berdimensi 3.

Definisi

Jika **u** = (u_1, u_2, u_3) dan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah dua buah vektor maka hasil kali silang, yang disimbolkan dengan **u** x **v**, didefinisikan sebagai,

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3\ v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - \ u_2v_1\ )$$

Contoh **:**

Tentukan u x v dimana u = (1,2,-2) dan v = (3,0,1)

Penyelesaian :

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right) = (2, -7, -6)$$

HUBUNGAN ANTARA HASIL KALI SILANG DAN HASIL KALI TITIK

Jika **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka:

(a) u . (u x v) = 0 (u ortogonal terhadap u x v)

(b) v . (u x v) = 0 (v ortogonal terhadap u x v)

(c) $||\mathbf{u} \text{ x } \mathbf{v}||2 = ||\mathbf{u}||2 \; ||\mathbf{v}||2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (identitas ***Lagrange***)

(d) **u** x (**v** x **w**) = (**u . w**)**v** – (**u . v**)**w** (hubungan hasil kali titik dan hasil kali silang)

(e) (**u** x **v**) x **w** = (**u . w**)**v** – (**v . w**)**u** (hubungan hasil kali titik dan hasil kali silang)

SIFAT – SIFAT HASIL KALI SILANG

Jika **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, dan *k* adalah sembarang skalar, maka:

(a) **u** x **v** = – (**u** x **v**)

(b) (b) **u** x (**v**+**w**) = (**u** x **v**) + (**u** x **w**)

(c) (c) (**u** + **v**) x **w** = (**u** x **w**) + (**v** x **w**)

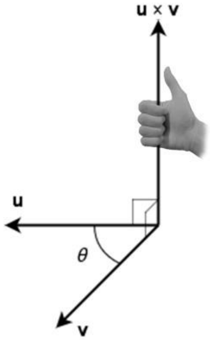
(d) (d) *k*(**u** x **v**) = (*k***u**) x **v**

(e) (e) **u** x **0** = **0** x **u** = **0**

(f) (f) **u** x **u** = **0**

ATURAN TANGAN KANAN

Dari "hubungan antara hasil kali titik dan hasil kali silang" diketahui bahwa u x v adalah orthogonal terhadap u dan v. Jika u dan v adalah vektor-vektor tak nol maka dapat ditunjukkan bahwa arah dari u x v dapat ditentukan dengan menggunakan "aturan tangan kanan" seperti pada gambar 5.3.2.1.



Gambar 5.3.2.1 Aturan tangan kanan

Misalkan q adalah sudut antara u dan v, dan misalkan u dirotasikan melewati sudut q hingga berhimpitan dengan v. Jika jari- jari tangan kanan dikatupkan sehingga jari-jari tersebut menunjukkan ke arah rotasi, maka ibu jari menunjukkan (kurang lebih) arah dari u x v.

INTERPRETASI GEOMETRIK HASIL KALI SILANG

Jika u dan v adalah vektor – vektor dalam dimensi – 3 maka norma dari u x v mempunyai suatu interpretasi geometris yang berguna. Dari Identitas Lgrange dinyatakan bahwa

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u.v)^2$$

Jika θ menyatakan sudut antara u dan v maka u . v = $\|u\|^2\|v\|^2 \cos\theta$ sedemikan sehingga bisa ditulis ulang

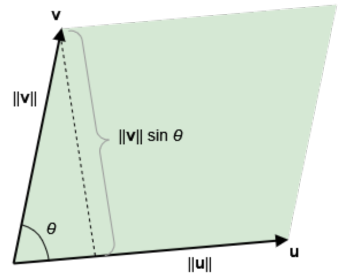
$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 cos^2\theta$$

$$= \|u\|^2\|v\|^2(1 - cos^2\theta)$$

$$= \|u\|^2\|v\|^2 sin^2\theta$$

Karena 0 ≤ θ ≤ π, maka θ ≥ 0, sehingga bisa dituliskan

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin\theta$$



Gambar 5.3.2.2 Luas jajar genjang

$\|v\|$sin θ adalah tinggi dari jajar genjang yang ditentukan oleh u dan v sehingga (gambar 5.3.2.2)

Luas jajar genjang = alas x tinggi = $\|u\|\|v\|$ sin θ = $\|u \times v\|$

Contoh :

Tentukan luas segitiga yang dibatasi oleh titik P1 (2,2,0), P2 (-1,0,2) dan P3(0,4,3)

Penyelesaian:

Luas segitiga tersebut adalah $\frac{1}{2}$ luas jajar genjang yang dibentuk $\overrightarrow{P_1P_2}$ dan $\overrightarrow{P_1P_3}$ dimana

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,0,2) - (2,2,0) = (-3,-2,2)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (0,4,3) - (2,2,0) = (-2,2,3)$

$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10,5,-10)$

Sehingga luas segitiga = $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right\| = \frac{1}{2}(15) = 7\frac{1}{2}$

PERKALIAN SKALAR RANGKAP TIGA

Jika u, v, dan w adalah vektor dalam ruang dimensi 3, maka u · (v × w) disebut **perkalian skalar rangkap tiga** (scalar triple product) dari u, v, dan w.

$$u\,.(v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Contoh :

Hitunglah u · (v × w) dari vektor

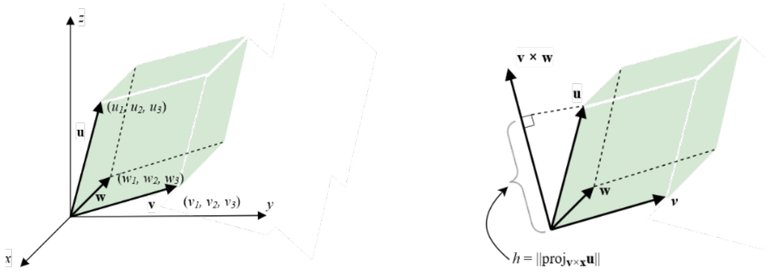
u = 3i – 2j – 5k, v = i + 4j – 4k, w = 3j + 2k

Penyelesaian :

$$u\,.(v \times w) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 60 + 4 - 15 = 49$$

VOLUME PARALLELEPIPED



Gambar 5.3.2.3 Contoh vektor volume parallelepiped

Sebagaimana tampak pada gambar 5.3.2.3 , anggap bahwa alas dari parallelepiped yang dibatasi oleh u, v dan w sebagai parallelogram yang dibatasi oleh v dan w. Telah kita pelajari sebelumnya bahwa luas alas adalah $\|v \times w\|$ dan sebagaimana diilustrasikan pada gambar a, bahwa tinggi h dari parallelepiped adalah Panjang dari proyeksi orthogonal u pada v x w. Maka

$$h = \|proj_{v\times w}u\| = \frac{|u\,.(v \times w)|}{\|v \times w\|}$$

maka volume dari parallelepiped adalah

$$\text{V = luas alas . tinggi} = \|v \times w\| \frac{|u\,.(v\times w)|}{\|v\times w\|} = |u\,.(v \times w)|$$

Latihan Soal 5.4

1. Misalkan u = (1,2,4) , v = (2,0,-1) dan w = (1,5,3). Hitunglah
    a. v x w
    b. u x v x w
    c. v x (u – 3w)
2. Tentukan luas dari parallelogram yang dibatasi oleh u dan v berikut ini

    u = (-1,2,2) dan v = (2,3,0)

3. Tentukan luas dari suatu segitiga dengan titik sudut A,B,C

A(4,12,-2) B(2,2,2) C(8,12,4)

4. Tentukan hasil kali tripel skalar dari u . (v x w)

u = (2,-1,1), v = (2,-4,3), dan w = (-2,1,5)

5. Misalkan u . (v x w) = 5 maka tentukan
   a. a. w . (u x v)
   b. b. v . (w x u)

5.5. ORTOGONALITAS

VEKTOR ORTOGONAL

Dua vektor bukan nol **u** dan **v** pada R^n dikatakan **ortogonal** (atau **tegak lurus**) jika **u** · **v** = 0.

Contoh :

Tunjukkan bahwa **u** = (−2, 3, 1, 4) dan **v** = (1, 2, 0, −1) merupakan vektor yang saling tegak lurus di R^4.

Penyelesaian :

Kedua vektor tersebut tegak lurus atau orthogonal karena

u · **v** = (−2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(−1) = 0

PERSAMAAN TITIK NORMAL

Gambar di bawah ini menunjukkan garis yang melalui $P_0(x_0, y_0)$ dengan **n** = (a, b) dan bidang yang melalui $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan normal **n** = (a, b, c). Kedua garis dan bidang dapat ditunjukkan dengan persamaan vektor $n\,.\,\overrightarrow{P_0P} = 0$ dimana P sembarang titik (x,y) pada garis atau sembarang (x,y,z) pada bidang.

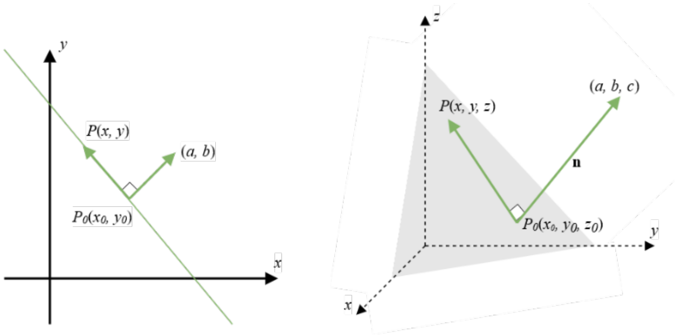
Vektor $\overrightarrow{P_0P}$ dapat ditulis dalam bentuk komponen sebagai

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0) \qquad \text{(garis)}$$
$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \qquad \text{(bidang)}$$

Persamaan $n\,.\,\overrightarrow{P_0P} = 0$ dapat ditulis menjadi

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad \text{(garis)}$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad \text{(bidang)}$$

Persamaan tersebut adalah **persamaan titik normal** garis dan bidang. (Gambar 5.4.1)



Gambar 5.4.1 Titik normal garis dan bidang

Ingat bahwa $ax + by = 0$ dan $ax + by + cz = 0$ adalah persamaan homogen.

Persamaan homogen dalam dua atau tiga veriabel yang tidak diketahui dapat ditulis dengan bentuk vektor

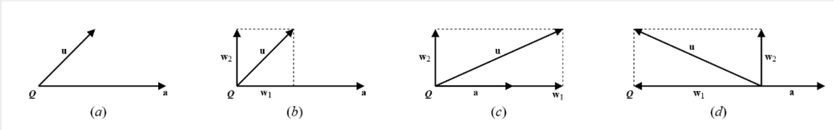
$$\mathbf{n}\ .\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

dimana **n** adalah vektor koefisien dan **x** adalah vektor variabel yang tidak diketahui. Dalam R^2 persamaan tersebut disebut **bentuk vektor garis** yang melalui titik asal, dan dalam R^3 disebut **bentuk vektor bidang** yang melalui titik asal.

PROYEKSI ORTHOGONAL

Jika vektor u dan a diposisikan sehingga titik – titik pangkalnya berimpitan pada suatu titik Q, kita dapat menguraikan vektor u sebagai berikut. Tarik garis tegak lurus ke bawah dari ujung u ke garis melalui a dan bentuk vektor dari Q ke kaki garis tegak lurus ini. Berikutnya susunlah selisih

$$w_2 = u - w_1$$



Gambar 5.4.1 Contoh kasus proyeksi orthogonal

Vektor w_1 sejajar dengan a, vektor w_2 tegak lurus dengan a, dan

$$w_1 + w_2 = w_1 + (u - w_1) = u$$

Vektor w_1 disebut **proyeksi orthogonal dari u pada a** atau **komponen vektor dari u yang sejajar dengan a**. Hal ini dinyatakan dengan

$$proy_a\, u$$

Vektor w_2 disebut **komponen vektor u yang orthogonal terhadap a**. Karena sebelumnya didapatkan $w_2 = u - w_1$,

vektor ini bisa ditulis ulang dalam notasi sebagai

$$w_2 = u - proy_a\, u$$

Teorema 5.5.1

Jika u dan a adalah vektor – vektor pada ruang berdimensi 2 atau berdimensi 3 dan jika a ≠ 0 maka

$$\boldsymbol{proy_a\, u} = \frac{\boldsymbol{u \,.\, a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} \textbf{ (komponen vektor u yang sejajar dengan a)}$$

$$\textbf{u - }\boldsymbol{proy_a\, u} = \textbf{u} - \frac{\boldsymbol{u \,.\, a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} \textbf{ (komponen vektor u yang orthogonal terhadap a)}$$

Panjang komponen vektor u yang sejajar a diperoleh

$$\|\boldsymbol{proy_a\, u}\| = \frac{|\boldsymbol{u \,.\, a}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$$

Jika θ menyatakan sudut antara u dan a, maka

$$u \cdot a = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{\theta} \text{ sehingga bisa ditulis}$$

$$\|\boldsymbol{proy_a}\ \boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{u}\|\ |\boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{\theta}|$$

Contoh :

Misalkan u = (2,-1,3) dan v = (4,-1,2). Tentukan komponen vektor u sepanjang v dan komponen vektor u yang ortogonal terhadap v.

Penyelesaian :

u . v = (2)(4) + (-1)(-1)+(3)(2)=15

$\|v\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$

Jadi komponen vektor u sepanjang v adalah

$$\boldsymbol{proy_v}\ \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}\ .\ \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{21}}(\mathbf{4}, -\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \left(\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

dan komponen vektor u yang ortogonal terhadap v adalah

$$\mathbf{u} - \boldsymbol{proy_v}\ \boldsymbol{u} = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

Teorema 5.5.2

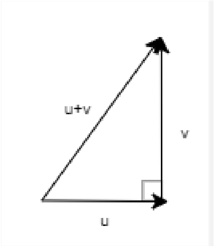
Pythagoras dalam R^n

Jika u dan v adalah vektor yang tegak lurus pada R^n maka

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Karena u dan v ortogonal, maka u.v sama dengan 0

$$\|u + v\|^2 = (u + v).(u + v) = \|u\|^2 + 2(u.v) + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$



Gambar 5.4.2 Vektor teorema Pythagoras

Contoh :

Pada contoh sebelumnya telah dibuktikan bahwa vektor u = (−2, 3, 1,4) dan v = (1, 2, 0, −1) saling tegak lurus. Tunjukkan Teorema Pythagoras berlaku pada vektor tersebut.

Penyelesaian :

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(-2+1)^2+(3+2)^2+(1+0)^2+(4+(-1))^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(-2)^2+(3)^2+(1)^2+(4)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(1)^2+(2)^2+(0)^2+(-1)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(-1)^2+(5)^2+(1)^2+(3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{4+9+1+16}\right)^2 + \left(\sqrt{1+4+0+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+25+1+9}\right)^2 = \left(\sqrt{30}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{36}\right)^2 = \left(\sqrt{30}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 36 = 30 + 6$$

$$36 = 36$$

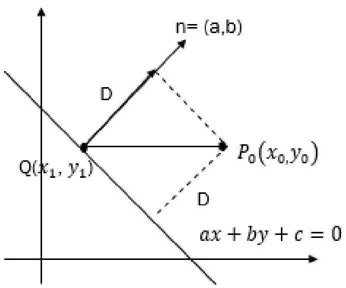
RUMUS JARAK DENGAN VEKTOR

Jarak pada suatu titik pada bidang ke suatu garis.

Carilah Rumus untuk jarak D antara titik $P_0(x_0, y_0)$ dan garis $ax + by + c = 0$.

Penyelesaian :

Anggap $Q(x_1,\ y_1)$ adalah sebarang titik pada garis tersebut dan letakkan vektor n= (a,b) sedemikian sehingga titik pangkalnya ada di Q. Sebagaimana yang ditunjukkan pada gambar 5.4.3 di bawah ini, jarak D sama dengan Panjang proyeksi orthogonal dari $\overrightarrow{QP_o}$ terhadap n, jadi



Gambar 5.4.3 Jarak dalam vektor

$$D = \left\|proy_n\ \overrightarrow{QP_o}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{QP_o}.\ n\right|}{\|n\|}$$

$$\overrightarrow{QP_o} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$$

$$\overrightarrow{QP_o}.\ n = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)$$

$$\|n\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sehingga

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Jarak titik ke garis

Karena titik $Q(x_1,\ y_1)$ terletak pada garis tersebut, maka koordinatnya memenuhi persamaan garis tersebut sehingga

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

atau

$c = -ax_1 - by_1$ sehingga

$$\boldsymbol{D} = \frac{|\boldsymbol{ax_0} + \boldsymbol{by_0} + \boldsymbol{c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}}$$

Jarak titik ke bidang

Jarak D antara sebuah titik Po(x_o, y_o, z_o) dan bidang ax +by + cz + d = 0 adalah

$$\boldsymbol{D} = \frac{|\boldsymbol{ax_0} + \boldsymbol{by_0} + \boldsymbol{cz_0} + \boldsymbol{d}|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2}}$$

Jarak dua bidang sejajar

Untuk menentukan jarak dari dua bidang yang sejajar, kita bisa mengambil salah satu titik sembarang dari satu bidang dan mencari jarak dari titik tersebut ke bidang lainnya dengan rumus jarak dari titik ke bidang.

Contoh :

Tentukan jarak dari dua bidang sejajar berikut ini :

x + 2y – 2z = 3 dan 2x + 4y – 4z = 7

Penyelesaian

Untuk menentukan jarak D antara kedua bidang tersebut, kita dapat memilih suatu titik sebarang pada salah satu bidang dan menghitung jaraknya terhadap bidang yang lain. Dengan mensubtitusikan y = z = 0 pada persamaan x + 2y – 2z = 3 kita memperoleh titik $P_0(3,0,0)$ pada bidang ini. Sehingga jarak dari P_0 dan bidang 2x + 4y -4z = 7 adalah

$$D = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

Latihan Soal 5.5

1. Tentukan apakah kedua vektor ini saling tegak lurus ?
   a. u = (3,1,-2) dan v = (1,0,-4)
   b. u = (2,0,-3) dan v = (6,1,4)
   c. u = (2,2,2) dan v = (0,0,-2)
2. Tentukan proyeksi ortogonal u pada a
   a. u = (2,-4) dan a =(3,-2)
   b. u = (6,2,10) dan a = (2,0,7)
3. Dari setiap nomor 2 tentukan komponen vektor u yang ortogonal terhadap a
4. Tentukan $\|\text{proy}_a\, u\|$ dari setiap soal pada nomor 2
5. Tentukan jarak antara titik (1,−2,−4) dan bidang 2x − 3y + 6z =−1
6. Tentukan jarak antara dua bidang yang saling sejajar berikut: x + 2y − 2z = 3 dan 2x + 4y − 4z = 7

5.6. GEOMETRI SISTEM LINIER

Pada bagian ini, kita akan menggunakan metode parametrik dan vektor untuk mempelajari sistem umum persamaan linier. Kita akan menafsirkan himpunan solusi sistem linier dengan *n* variabel yang tidak diketahui sebagai objek geometris di R^n seperti titik, garis, dan bidang di R^2 dan R^3.

PERSAMAAN VEKTOR DAN PARAMETRIK GARIS DAN BIDANG PADA R^2 DAN R^3

Definisi 1

Jika $\boldsymbol{x}_0$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor di R^n , dan jika $\boldsymbol{v}$ tidak nol, maka persamaan

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$$

mendefinisikan ***garis melalui*** $\boldsymbol{x}_0$ ***yang sejajar terhadap*** $\boldsymbol{v}$. Pada kasus khusus dimana $\boldsymbol{x}_0 = 0$, garis dikatakan ***melalui titik asal***.

Definisi 2

Jika $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{v}_1$, dan $\boldsymbol{v}_2$ adalah vektor di R^n, dan jika $\boldsymbol{v}_1$, dan $\boldsymbol{v}_2$ tidak segaris, maka persamaan

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2$$

mendefinisikan ***bidang melalui*** $\boldsymbol{x}_0$ ***yang sejajar terhadap*** $\boldsymbol{v}_1$, dan $\boldsymbol{v}_2$. Pada kasus khusus dimana $\boldsymbol{x}_0 = 0$, bidang dikatakan ***melalui titik asal***.

Contoh 1

Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik dari garis di R^3 yang melalui titik $P_0 = (1, -2, -4)$ dan sejajar terhadap $\boldsymbol{v} = (6, -5, 7)$.

Penyelesaian:

Misal: $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ dan $\boldsymbol{x}_0 = (1, -2, -4)$ maka persamaan vektor dari garis adalah

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$$

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, -2, -4) + t(6, -5, 7) \\ &= (1, -2, -4) + (6t, -5t, 7t) \\ &= (1 + 6t, -2 - 5t, -4 + 7t)\end{aligned}$$

Diperoleh persamaan parametrik:

$$x = 1 + 6t, \qquad y = -2 - 5t, \qquad z = -4 + 7t$$

Contoh 2

Tentukan persamaan vektor dan parametrik dari bidang $x - 3y + 4z = 8$.

Penyelesaian:

Kita akan mencari persamaan parametrik dengan menyelesaikan persamaan salah satu variabel ke dalam dua variabel lainnya dan kemudian menentukan parameter pada kedua variabel tersebut. Misalnya, menyelesaikan x dalam bentuk y dan z.

$x - 3y + 4z = 8$

$x = 8 + 3y - 4z$

Gunakan parameter t_1 dan t_2 berturut-turut sebagai y dan z, maka diperoleh persamaan parametrik

$$x = 8 + 3t_1 - 4t_2, \qquad y = t_1, \qquad z = t_2$$

Untuk memperoleh persamaan vektor bidang, maka kita tulis persamaan parametrik di atas menjadi

$$(x, y, z) = (8 + 3t_1 - 4t_2, t_1, t_2)$$

atau

$$(x, y, z) = (8, 0, 0) + t_1(3,1,0) + t_2(-4, 0, 1)$$

GARIS YANG MELALUI DUA TITIK

Jika x_0 dan x_1 adalah titik yang berbeda pada R^n, garis yang ditentukan oleh titik tersebut sejajar dengan vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$,, maka garis dapat dituliskan dalam bentuk vektor:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)$$

atau

$$\boldsymbol{x} = (1 - t)\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{x}_1$$

Persamaan di atas disebut ***persamaan vektor dua-titik*** dari garis pada R^n.

***Definisi* 3**

Jika $\boldsymbol{x}_0$ dan $\boldsymbol{x}_1$ adalah vektor di R^n, maka persamaan

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

mendefinisikan ***segmen garis dari*** $\boldsymbol{x}_0$ ***sampai*** $\boldsymbol{x}_1$. Persamaan tersebut dapat juga ditulis menjadi

$$\boldsymbol{x} = (1 - t)\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{x}_1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Contoh 3

Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik untuk garis pada R^2 yang melalui titik $P(0, 8)$ dan $Q(3, 0)$.

Penyelesaian:

Kita bebas menentukan titik mana yang akan dianggap sebagai $\boldsymbol{x}_0$ dan $\boldsymbol{x}_1$.
Misal $\boldsymbol{x}_0 = (0, 8)$ dan $\boldsymbol{x}_1 = (3, 0)$, maka
$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0 = (3, 0) - (0, 8) = (3, -8)$

Kemudian

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\\
(x, y) &= (0,8) + t(3,-8)\\
&= (0,8) + (3t,-8t)\\
&= (3t, 8-8t)
\end{aligned}$$

Kita dapat menuliskan bentuk parametrik menjadi

$$x = 3t, \quad y = 8 - 8t$$

Contoh 4

Tentukan segmen garis pada R^2 dari $\boldsymbol{x}_0 = (1,-4)$ sampai $\boldsymbol{x}_1 = (2,6)$.

Penyelesaian:

Segmen garis pada R^2 dari $\boldsymbol{x}_0 = (1,-4)$ sampai $\boldsymbol{x}_1 = (2,6)$ dapat dituliskan dalam persamaan:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) \quad (0 \le t \le 1)$$

$$\boldsymbol{x} = (1,-4) + t\big((2,6) - (1,-4)\big) \; (0 \le t \le 1)$$

$$\boldsymbol{x} = (1,-4) + t(1,10) \; (0 \le t \le 1)$$

atau

$$\boldsymbol{x} = (1-t)(1,-4) + t(2,6) \quad (0 \le t \le 1)$$

BENTUK PERKALIAN TITIK PADA SISTEM LINIER

Persamaan homogen $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ $(a_1, a_2, \dots, a_n$ semua tidak nol) dapat ditulis kembali dalam bentuk vektor:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0$$

di mana $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa setiap penyelesaian vektor $\boldsymbol{x}$ dari persamaan homogen tegak lurus terhadap vektor koefisien $\boldsymbol{a}$.

Dalam sistem homogen

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &= 0\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

Jika kita misalkan matriks koefisien berturut-turut sebagai vektor baris $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \dots, \boldsymbol{r_m}$ maka kita dapat menuliskan kembali dalam bentuk perkalian titik:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r_1} \cdot \boldsymbol{x} &= 0 \\ \boldsymbol{r_2} \cdot \boldsymbol{x} &= 0 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \boldsymbol{r_m} \cdot \boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

Teorema 5.6.1

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka himpunan penyelesaian dari sistem linier homogen $A\boldsymbol{x} = 0$ terdiri dari semua vektor dalam R^n yang ortogonal dengan setiap vektor baris A.

Contoh 5

Sifat Ortogonal dari Vektor Baris dan Vektor Solusi

Diketahui sistem homogen berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistem linier yang homogen tersebut dapat dituliskan dalam *augmented matrix*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan yang bersesuaian dengan eselon baris tereduksi di atas adalah

$$x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 6x_6 = 0$$

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 6x_6$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 0$$

$$x_3 = -2x_4 - 3x_6$$

$$x_5 = 0$$

Misalkan $x_2 = r, x_4 = s$, dan $x_6 = t$, maka solusi umum berupa persamaan parametriknya adalah:

$$x_1 = -3r - 4s - 6t$$

$$x_2 = r$$

$$x_3 = -2s - 3t$$

$$x_4 = s$$

$$x_5 = 0$$

$$x_6 = t$$

dan bentuk vektornya $\boldsymbol{x} = (-3r - 4s - 6t, r, -2s - 3t, s, 0, t)$

Berdasarkan teorema, vektor x pasti tegak lurus dengan setiap vektor baris:

$$\boldsymbol{r}_1 = (1, 3, -2, 0, 2, 0)$$
$$\boldsymbol{r}_2 = (2, 6, -5, -2, 4, -3)$$
$$\boldsymbol{r}_3 = (0, 0, 1, 2, 1, 3)$$
$$\boldsymbol{r}_4 = (1, 3, 0, 4, 2, 6)$$

Latihan Soal 5.6.

1. Tentukan persamaan vektor dan parametrik dari garis yang melalui titik $\boldsymbol{x}_0 = (5, -1, 7, -3)$ di R^4 yang sejajar vektor $\boldsymbol{v} = (5, -2, 4, 1)$.
2. Tentukan persamaan vektor dan parametrik dari garis yang melalui titik asal di R^4 yang sejajar terhadap vektor $\boldsymbol{v_1} = (-1, -3, -2, -5)$ dan $\boldsymbol{v_1} = (10, -5, 7, 1)$.
3. Tentukan persamaan vektor dan parametrik dari bidang di R^3 berikut ini:
   a. $2x + 3y - 5z = 1$
   b. $-3x + 9z = 6$
4. Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik untuk garis pada R^2 yang melalui titik $x_1(4, -9)$ dan $x_2(-7, 3)$.
5. Tentukan segmen garis pada R^3 dari $\boldsymbol{x}_0 = (5, -1, -4)$ sampai dengan $\boldsymbol{x}_1 = (7, -2, 3)$.
6. Diketahui sistem homogen:
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \phantom{{}- x_3} - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$
   misalkan matriks koefisien sistem homogen di atas berturut-turut sebagai vektor baris $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}$, tentukan semua vektor yang tegak lurus dengan setiap vektor baris tersebut.

Latihan Soal Bab V

1. Gambarlah sketsa dari vektor -vektor berikut dimana titik awalnya terletak pada titik asal
   a. $w_1 = (6,4)$
   b. $w_2 = (1,4,9)$
2. Tentukan komponen – komponen vektor dengan titik awal P_1 dan titik akhir P_2
   a. P_1 (-2,4), P_2(5,8)
   b. P_1 (2,-3), P_2(-2,-9)

3. Tentukan komponen – komponen vektor dengan titik awal P_1 dan titik akhir P_2
   a. P_1 (2,-5,1), P_2(-3,4,-5)
   b. P_1 (-2,0,4), P_2(2,4,0)
4. Temukan titik akhir (ujung) vektor yang ekuivalen dengan vektor u = (1,3) dan titik pangkal vektor adalah B (4,8).
5. Temukan titik pangkal vektor yang ekuivalen dengan vektor u = (1,3,5) dan titik pangkal vektor adalah B (2,6,8).
6. Tentukan suatu vektor tak nol **w** dengan titik awal A(-1,4,-8) sedemikian rupa sehingga vektor **w** memiliki arah yang sama dengan **u** = (6,8,-3)
7. Tentukan norma dari w
   a. w = (-3,5)
   b. v = (-4,-2,4)
8. Tentukan jarak antara P_1 dan P_2
   a. P_1(-5,2);P_2(-1,4)
   b. P_1(3,3,5);P_2(-3,2,1)
9. Misalkan **p** = (-3, 1, 2), **q** = (3, 2, 4) and **r** = (2, -1, -3).
   a. Tentukan komponen dari 2(**p** +5**q**)
   b. Tentukan komponen vektor **x** yang memenuhi 2q - **p** + **x** = 3**p** - **q**
   c. Tentukan skalar a, b, c sehingga 2a**p** + b**q** - 3c**r** = (-3, 2, -2)
10. Misalkan p = (-1,-2,1), q = (3,-2,2), dan r = (1,-5,-2). Hitunglah
   a. $\|q\| + \|p\|$
   b. $\|2q - r\|$
   c. $\|4p - 2q + 2r\|$
11. Tentukan nilai dari u.v, jika diketahui sebagai berikut
   a. u = (-3,5) dan v = (2,-4)
   b. u = (1,-3,7) dan v = (1,-5,8)
12. Dari u dan v pada nomor 1 tentukan nilai cosinus dari sudut antara dua vektor tersebut.

13. Misalkan u = (2,-5), v = (1,-3) dan w =(4,8). Tentukan nilai dari
    a. v . (-3u - w)
    b. || w(u . w) ||
    c. ||u|| (v.u)
14. Pakailah vektor – vektor berikut untuk mencari cosinus dari sudut-sudut bagian dalam segitiga dengan titik – titik sudut (-2,0), (3,-4) dan (1,2).
15. Misalkan u = (3,1,-2) , v = (0,2,-5) dan w = (-2,2,-4). Hitunglah
    a. w x v
    b. (u x w) x v
    c. 2v x (w – 3u)
16. Tentukan luas dari parallelogram yang dibatasi oleh u dan v berikut ini

    u = (6,2,-8) dan v = (3,-1,4)
17. Tentukan persamaan vektor dan parametrik dari bidang di R^4 yang melalui titik $\boldsymbol{x}_0 = (6, -1, 0, 2)$ dan sejajar dengan $\boldsymbol{v_1} = (1, 4, 2, -5)$ dan $\boldsymbol{v_1} = (0, 5, -8, 5)$.
18. Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik untuk garis pada R^3 yang melalui titik $P(-1, 0, 6)$ dan $Q(-3, 1, 10)$.
19. Tentukan persamaan parametrik dan persamaan vektor (bentuk vektor) dari solusi umum sistem linier di bawah ini:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

20. Diketahui sistem homogen:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + \quad x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - \quad x_3 - 2\,x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 + \quad x_5 &= 0 \\ x_1 + \qquad\qquad\qquad 4x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

    misalkan matriks koefisien sistem homogen di atas berturut-turut sebagai vektor baris $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}, \boldsymbol{r_4}$, tentukan semua vektor yang tegak lurus dengan setiap vektor baris tersebut.

Bab VI
RUANG VEKTOR UMUM

6.1. RUANG VEKTOR DAN SUBUANG

Kita akan memperluas konsep vektor dengan menggunakan sifat dasar vektor di R^n sebagai aksioma, yang jika dipenuhi oleh himpunan objek akan menjamin bahwa objek tersebut seperti vektor.

AKSIOMA RUANG VEKTOR

Definisi

Misal V adalah himpunan objek tak kosong yang sembarang di mana dua operasi didefinisikan: penjumlahan, dan perkalian dengan bilangan yang disebut ***skalar***. Penjumlahan yang dimaksud adalah aturan untuk mengasosiasikan setiap pasangan objek $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di V, objek $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ disebut ***jumlah*** $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$; ***perkalian skalar*** yang maksud adalah aturan untuk mengasosiasikan dengan setiap skalar k dan setiap objek $\boldsymbol{u}$ di V, objek $k\boldsymbol{u}$ disebut kelipatan skalar $\boldsymbol{u}$ oleh k. Jika aksioma di bawah ini terpenuhi oleh semua objek $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ di V dan semua skalar k dan m, maka V disebut ***vektor space*** (***ruang vektor***) dan objek di V disebut ***vektor***.

Aksioma

1. Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah objek di V, maka $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ di V.
2. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
3. $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$
4. Ada sebuah objek $\boldsymbol{0}$ di V, disebut vektor nol untuk V, sehingga $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$ untuk semua $\boldsymbol{u}$ di V.
5. Untuk setiap $\boldsymbol{u}$ di V, ada objek $-\boldsymbol{u}$ di V, disebut negatif $\boldsymbol{u}$, sehingga $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=(-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$

6. Jika k adalah sembarang skalar dan $\boldsymbol{u}$ adalah sembarang objek di V, maka $k\boldsymbol{u}$ di V.
7. $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}$
8. $(k+m)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u}+m\boldsymbol{u}$
9. $k(m\boldsymbol{u}) = (km)\boldsymbol{u}$
10. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Langkah dasar untuk menunjukkan bahwa himpunan dengan dua operasi adalah ruang vektor adalah sebagai berikut:

Langkah 1 Menentukan himpunan V objek yang akan menjadi vektor.

Langkah 2 Menentukan operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada V.

Langkah 3 Memverifikasi Aksioma 1 dan 6, yaitu menambahkan dua vektor di V menghasilkan sebuah vektor di V, dan mengalikan vektor di V dengan skalar juga menghasilkan sebuah vektor di V.

Langkah 4 Mengkonfirmasi bahwa Aksioma 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, dan 10 berlaku.

Contoh 1

Tentukan apakah semua himpunan matriks 2×2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ dengan penjumlahan matriks standar dan perkalian skalar adalah ruang vektor. Jika bukan ruang vektor, identifikasi aksioma ruang vektor yang gagal.

Penyelesaian:

Misal V adalah himpunan semua matriks yang berukuran 2×2 dalam bentuk $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$. Jika A, B dan C adalah matriks di V maka A dan B dapat dinyatakan dalam bentuk

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & e \\ f & 0 \end{bmatrix}$$

untuk semua bilangan real a, b, c, d, e dan f.

Aksioma 1:

$$A+B=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & c\\ d & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a+c\\ b+d & 0\end{bmatrix}$$

Hasil penjumlahan juga sebuah matriks di V karena merupakan bentuk $\begin{bmatrix}0 & x\\ y & 0\end{bmatrix}$ dengan $x=a+c$ dan $y=b+d$. Jadi, V bersifat tertutup pada penjumlahan.

Aksioma 2:

$$A+B=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & c\\ d & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a+c\\ b+d & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & c\\ d & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}=B+A$$

Penjumlahan matriks bersifat komutatif.

Aksioma 3:

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}0 & c\\ d & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & e\\ f & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & c+e\\ d+f & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a+c+e\\ b+d+f & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & a+c\\ b+d & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & e\\ f & 0\end{bmatrix}=(A+B)+C$$

Aksioma 4:

Ambil $\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\mathbf{0}+A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}=A$$

$$A+\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}=A$$

Aksioma 5:

Misal negatif dari A adalah $\begin{bmatrix}0 & -a\\ -b & 0\end{bmatrix}$

$$A+(-A)=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -a\\ -b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

$$-A+A=\begin{bmatrix}0 & -a\\ -b & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

Aksioma 6:

$$kA = k\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ka \\ kb & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil perkalian dengan skalar ada di V karena merupakan bentuk $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ dengan $x = ka$ dan $y = kb$

Aksioma 7:

$$\begin{aligned} k(A+B) &= k\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix}\right) = k\begin{bmatrix} 0 & a+c \\ b+d & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ka+kc \\ kb+kd & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ka \\ kb & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & kc \\ kd & 0 \end{bmatrix} \\ &= kA + kB \end{aligned}$$

Aksioma 8:

$$\begin{aligned} (k+m)A &= (k+m)\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (k+m)a \\ (k+m)b & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ka+ma \\ kb+mb & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ka \\ kb & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ma \\ mb & 0 \end{bmatrix} \\ &= k\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = kA + mA \end{aligned}$$

Aksioma 9:

$$\begin{aligned} k(mA) &= k\left(m\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\right) = k\begin{bmatrix} 0 & ma \\ mb & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & kma \\ kmb & 0 \end{bmatrix} \\ &= (km)\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = (km)A \end{aligned}$$

Aksioma 10:

$$1A = 1\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = A$$

Semua aksioma berlaku, jadi himpunan matriks 2×2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ dengan penjumlahan matriks standar dan perkalian skalar adalah ruang vektor.

Contoh 2

Diketahui W adalah himpunan semua pasangan bilangan real terurut. Operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$$

adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1 - 2, u_2 + v_2 - 2) \text{ dan } k\boldsymbol{u} = (ku_1, ku_2)$$

a. Tentukan $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ dan $k\boldsymbol{u}$ jika $\boldsymbol{u} = (-1, 4)$, $\boldsymbol{v} = (1, -6)$, dan $k = 3$.
b. Buktikan bahwa $(0, 0) \neq \mathbf{0}$.
c. Buktikan bahwa $(2,2) = \mathbf{0}$.
d. Tunjukkan bahwa Aksioma 5 berlaku dengan menghasilkan vektor $-\boldsymbol{u}$ sehingga $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ untuk $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$.

Temukan dua aksioma ruang vektor yang gagal dipenuhi.

Penyelesaian:

a. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (-1 + 1 - 2, 4 + (-6) - 2) = (-2, -4)$

$$k\boldsymbol{u} = (3(-1), 3(4)) = (-3, 12)$$

b. Berdasarkan Aksioma 4, $\mathbf{0}$ di W disebut vektor nol untuk W, jika $\mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ untuk semua $\boldsymbol{u}$ di W, sedangkan

$$(0, 0) + \boldsymbol{u} = (0 + u_1 - 2, 0 + u_2 - 2) = (u_1 - 2, u_2 - 2) \neq \boldsymbol{u}$$

atau

$$\boldsymbol{u} + (0, 0) = (u_1 + 0 - 2, u_2 + 0 - 2) = (u_1 - 2, u_2 - 2) \neq \boldsymbol{u}$$

Jadi dapat kita simpulkan bahwa $(0, 0) \neq \mathbf{0}$.

c. Berdasarkan aksioma 4, $\mathbf{0}$ di W disebut vektor nol untuk W, jika $\mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ untuk semua $\boldsymbol{u}$ di W.

$$(2, 2) + \boldsymbol{u} = (2 + u_1 - 2, 2 + u_2 - 2) = (u_1, u_2) = \boldsymbol{u}$$

atau

$$\boldsymbol{u} + (2, 2) = (u_1 + 2 - 2, u_2 + 2 - 2) = (u_1, u_2) = \boldsymbol{u}$$

Jadi, terbukti bahwa $(2, 2) = \mathbf{0}$.

d. Agar $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ untuk $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, kita misalkan

$$-\boldsymbol{u} = (-u_1 + 4, -u_2 + 4)$$

maka

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (u_1 + (-u_1 + 4) - 2, u_2 + (-u_2 + 4) - 2) = (2, 2) = \mathbf{0}$$

Ingat jika dalam kasus ini $\mathbf{0} = (2, 2)$ seperti yang sudah dibahas di bagian c.

Jadi, karena $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ berlaku maka Aksioma 5 juga berlaku.

e. Aksioma ruang vektor yang gagal dipenuhi adalah Aksioma 7 dan Aksioma 8.
Aksioma 7 gagal dipenuhi karena
$$\begin{aligned} k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= k(u_1+v_1-2, u_2+v_2-2) \\ &= (ku_1+kv_1-2k, ku_2+kv_2-2k) \end{aligned}$$
Sedangkan $k\boldsymbol{u} = (ku_1, ku_2)$ dan $k\boldsymbol{v} = (kv_1, kv_2)$ jika dijumlahkan:
$$k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v} = (ku_1+kv_1-2, ku_2+kv_2-2)$$
Hasil yang diperoleh $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \neq k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$.

Aksioma 8 gagal dipenuhi karena
$$\begin{aligned} (k+m)\boldsymbol{u} &= \big((k+m)u_1, (k+m)u_2\big) \\ &= (ku_1+mu_1, ku_2+mu_2) \end{aligned}$$
Sedangkan $k\boldsymbol{u} = (ku_1, ku_2)$ dan $m\boldsymbol{u} = (mu_1, mu_2)$ jika dijumlahkan:
$$k\boldsymbol{u} + m\boldsymbol{u} = (ku_1+mu_1-2, ku_2+mu_2-2)$$
Hasil yang diperoleh $(k+m)\boldsymbol{u} \neq k\boldsymbol{u} + m\boldsymbol{u}$

SUBRUANG

Suatu ruang vektor yang diinginkan sering terdapat dalam ruang vektor yang lebih besar yang sifat-sifatnya diketahui. Pada bagian ini kita akan mengetahui bagaimana sifat-sifat ruang vektor yang lebih besar dapat digunakan untuk memperoleh sifat-sifat ruang vektor yang lebih kecil.

Definisi

Sebuah himpunan bagian W dari ruang vektor V disebut ***subruang*** dari V jika W adalah ruang vektor itu sendiri di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang ditetukan pada V.

Teorema 6.1.1

Jika W adalah himpunan dari satu vektor atau lebih di ruang vektor V, maka W adalah subruang dari V jika dan hanya jika kondisi berikut ini terpenuhi.
(a) Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor di W, maka $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ di W.
(b) Jika k adalah skalar dan $\boldsymbol{u}$ adalah vektor di W, maka $k\boldsymbol{u}$ di W.

Contoh subruang dari R^2 dan R^3 ada di tabel 6.1.1.

Tabel 6.1.1 Subruang dari R^2 dan R^3

Subruang dari $\boldsymbol{R^2}$	Subruang dari $\boldsymbol{R^3}$
{0}	{0}
Garis yang melalui titik asal	Garis yang melalui titik asal
$\boldsymbol{R^2}$	Bidang yang melalui titik asal
	R^3

Contoh 3

Tentukan apakah himpunan W yang terdiri dari semua matriks berbentuk $\begin{bmatrix} x & 2y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ merupakan subruang dari M_{22}.

Penyelesaian:

Jika A dan B adalah matriks di W maka A dan B dapat dinyatakan dalam bentuk

$$A = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & a \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} c & 2d \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

untuk semua bilangan a, b, c, dan d.

Penjumlahan kedua matriks:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 2d \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & 2(b+d) \\ 0 & a+c \end{bmatrix}$$

juga sebuah matriks di W karena merupakan bentuk $\begin{bmatrix} x & 2y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ dengan $x = a + c$ dan $y = b + d$. Jadi, W bersifat tertutup pada penjumlahan. Dengan cara yang sama, W tertutup di bawah perkalian skalar karena

$$kA = k\begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & 2kb \\ 0 & ka \end{bmatrix}$$

merupakan bentuk $\begin{bmatrix} x & 2y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ dengan $x = ka$ dan $y = kb$. Kedua hasil tersebut membuktikan bahwa Wmerupakan subruang dari M_{22}.

Contoh 4

Tentukan apakah himpunan W yang terdiri dari semua polinomial berbentuk $\boldsymbol{p} = ax^2 - ax - 1$ dengan a adalah bilangan real merupakan subruang dari P_2.

Penyelesaian:

Misal: $\boldsymbol{p} = x^2 - x - 1$ dan $\boldsymbol{q} = 2x^2 - 2x - 1$ ada di W, maka

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = (x^2 - x - 1) + (2x^2 - 2x - 1) = 3x^2 - 3x - 2.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ tidak di W sehingga W tidak bersifat tertutup dalam penjumlahan.

Untuk perkalian dengan skalar, sebagai berikut:

$$k\boldsymbol{p} = k(x^2 - x - 1) = kx^2 - kx - k$$

Hasil perkalian skalar tidak di W, maka W juga tidak tetutup pada perkalian skalar.

Jadi kita bisa menyimpulkan bahwa himpunan W bukan merupakan subruang dari P_2.

Latihan Soal 6.1

1. Misal V adalah himpunan semua pasangan berurutan dari bilangan real, dan perhatikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar berikut pada $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$:
   $$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \text{ dan } k\boldsymbol{u} = (ku_1, 0)$$
   a. Hitung $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ dan $k\boldsymbol{u}$ untuk $\boldsymbol{u} = (2, -5)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 4)$, dan $k = 2$.
   b. Dengan kalimat, jelaskan kenapa V tertutup di bawah penjumlahan dan perkalian skalar.
   c. Karena penjumlahan pada V merupakan operasi penjumlahan biasa pada R^2, Aksioma ruang vektor tertentu berlaku untuk V karena mereka diketahui berlaku di R^2. Aksioma manakah itu?
   d. Tunjukkan bahwa aksioma 7, 8, dan 9 berlaku.
   e. Tunjukkan bahwa Aksioma 10 gagal dan oleh karena itu V bukan ruang vektor di bawah operasi yang diberikan.

2. Tentukan apakah himpunan semua bilangan real dengan operasi standar penjumlahan dan perkalian merupakan ruang vektor. Jika bukan ruang vektor, tentukan aksioma ruang vektor yang gagal.

3. Tentukan apakah himpunan semua pasangan bilangan real berbentuk (a, b), di mana $a \geq 0$, dengan operasi standar pada R^2 merupakan ruang vektor. Jika bukan ruang vektor, tentukan aksioma ruang vektor yang gagal.

4. Tentukan apakah himpunan W yang terdiri dari semua polinomial $\boldsymbol{p}$ di P_2 sedemikian sehingga $\boldsymbol{p}(-3) = 0$ merupakan subruang dari P_2.

5. Gunakan uji subruang untuk menentukan apakah himpunan semua vektor yang berbentuk $(1, 1, c)$ merupakan subruang dari R^3.

6. Gunakan uji subruang untuk menentukan apakah himpunan semua vektor yang berbentuk (a, b, c), di mana $c = a + b$. merupakan subruang dari R^3.

6.2. KOMBINASI LINIER

Definisi

Jika $\boldsymbol{w}$ adalah vektor di dalam ruang vektor V, maka $\boldsymbol{w}$ dikatakan ***kombinasi linier*** dari vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ di V jika $\boldsymbol{w}$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_r\boldsymbol{v_r}$$

dimana $k_1, k_2, \ldots k_r$ adalah skalar. Skalar ini disebut sebagai ***koefisien*** dari kombinasi linier.

Contoh 1

Diketahui $\boldsymbol{u} = (1, 1, -1)$ dan $\boldsymbol{v} = (6, 2, 2)$ pada R^3. Tunjukkan bahwa $\boldsymbol{w} = (5, 1, 3)$ kombinasi linier dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.

Penyelesaian:

Agar $\boldsymbol{w}$ kombinasi linier dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$, maka harus memenuhi persamaan

$$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$$
$$(5, 1, 3) = k_1(1, 1, -1) + k_2(6, 2, 2)$$
$$(5, 1, 3) = (k_1, k_1, -k_1) + (6k_2, 2k_2, 2k_2)$$
$$(5, 1, 3) = (k_1 + 6k_2, k_1 + 2k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Jika komponen-komponen yang bersesuaian disamakan, maka

$$k_1 + 6k_2 = 5$$
$$k_1 + 2k_2 = 1$$
$$-k_1 + 2k_2 = 3$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh $k_1 = -1$ dan $k_2 = 1$, maka

$$\boldsymbol{w} = (-1)\boldsymbol{u} + (1)\boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

Jadi $\boldsymbol{w}$ kombinasi linier dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.

Contoh 2

Diketahui $\boldsymbol{u} = (-1, 2, 1)$ dan $\boldsymbol{v} = (6, -4, 2)$ pada R^3. Tunjukkan bahwa $\boldsymbol{x} = (3, 2, 8)$ bukan kombinasi linier dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.

Penyelesaian:

Agar $\boldsymbol{x}$ kombinasi linier dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$, maka harus memenuhi persamaan

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$$
$$(3, 2, 8) = k_1(-1, 2, 1) + k_2(6, -4, 2)$$
$$(3, 2, 8) = (-k_1, 2k_1, k_1) + (6k_2, -4k_2, 2k_2)$$
$$(3, 2, 8) = (-k_1 + 6k_2, 2k_1 - 4k_2, k_1 + 2k_2)$$

Jika komponen-komponen yang bersesuaian disamakan, maka

$$-k_1 + 6k_2 = 3$$
$$2k_1 - 4k_2 = 2$$
$$k_1 + 2k_2 = 8$$

Dengan menggunakan eliminasi Gaussian diperoleh eselon baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Persamaan yang bersesuaian dengan baris ketiga, yaitu $0k_1 + 0k_2 = 3$. Sistem persamaan tersebut tidak konsisten, jadi tidak ada skalar k_1 dan k_2 yang menenuhi. Jadi $\boldsymbol{x}$ bukan kombinasi linier dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.

Contoh 3

Tunjukan bahwa matriks $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ merupakan kombinasi linier dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Agar $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ kombinasi linier dari A, B, C dan D, maka harus memenuhi persamaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = k_1A + k_2B + k_3C + k_4D$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_4\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_4 & 0 \\ k_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 2k_4 & k_1 + k_2 + 2k_3 \\ k_4 & -k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan:

$$k_1 + 2k_4 = 2$$
$$k_1 + k_2 + 2k_3 = 2$$
$$k_4 = 2$$
$$-k_1 + k_2 = 6$$

Augmented matrix, yang dapat dibentuk dari persamaan di atas adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh

$$k_1 = -2, k_2 = 4, k_3 = 0, k_4 = 2$$

oleh karena itu

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ kombinasi linier dari A, B, C dan D.

Latihan Soal 6.2

1. Diketahui $\boldsymbol{u} = (2, -2, 2)$, $\boldsymbol{v} = (0, 3, 1)$ dan $\boldsymbol{w} = (6, 0, 0)$ pada R^3. Apakah $\boldsymbol{x} = (4, 2, 2)$ merupakan kombinasi linier dari $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$? Jelaskan!

2. Diketahui $\boldsymbol{u} = (-1, 1, -2, 4)$ dan $\boldsymbol{v} = (-1, -2, 0, 2)$ pada R^4. Apakah $\boldsymbol{w} = (-1, 4, -4, 6)$ merupakan kombinasi linier dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$? Jelaskan!

3. Tunjukan bahwa matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}$ merupakan kombinasi linier dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

4. Manakah di bawah ini yang merupakan kombinasi linier dari vektor $\boldsymbol{u} = (1, -2, 2)$ dan $\boldsymbol{v} = (0, 3, -1)$?
   a. $(1, 1, 1)$
   b. $(0, 3, 5)$
   c. $(1, -5, 0)$

5. Tunjukkan bahwa $(0, 0, 0)$ merupakan kombinasi linier dari
$$\boldsymbol{p} = (1, -2, 2), \boldsymbol{q} = (-6, -1, 0), \boldsymbol{r} = (0, -2, 1).$$

6. Tunjukkan bahwa $(-5, 8, -9)$ merupakan kombinasi linier dari
$$\boldsymbol{u} = (1, 2, -3), \boldsymbol{v} = (2, -2, 3), \boldsymbol{w} = (-3, 6, -3).$$

6.3. KEBEBASAN LINIER

Definisi

Himpunan tak kosong $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}\}$ di dalam ruang vektor V adalah ***linearly independent*** (***bebas linier***) jika dan hanya jika koefisien yang memenuhi persamaan vektor
$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_r\boldsymbol{v_r} = \boldsymbol{0}$$
adalah $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$.

Contoh 1

Tentukan apakah $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 2, -2)$, dan $\boldsymbol{v}_3 = (0, -2, 3)$ merupakan himpunan bebas linier (*linearly independent*) atau bergantung linier (*linearly dependent*).

Penyelesaian:

Vektor-vektor yang bebas linier dan memenuhi persamaan
$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{0}$$
mempunyai koefisien $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$.

Untuk melihat apakah benar demikian, mari kita tulis ulang dalam bentuk komponen

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,2,-2) + k_3(0,-2,3) = (0{,}0{,}0)$$
$$(k_1,0,0) + (0,2k_2,-2k_2) + (0,-2k_3,3k_3) = (0{,}0{,}0)$$
$$(k_1, 2k_2 - 2k_3, -2k_2 + 3k_3) = (0{,}0{,}0)$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang bersesuaian pada kedua sisi akan menghasilkan sistem linier yang homogen

$$k_1 = 0$$
$$2k_2 - 2k_3 = 0$$
$$-2k_2 + 3k_3 = 0$$

Untuk mencari solusi dari sistem linier di atas dapat menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, dan menghasilkan

$$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$$

Sehingga dapat disimpulan bahwa $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, dan $\boldsymbol{v}_3$ merupakan himpunan bebas linier (*linearly independent*).

Contoh 2

Tentukan apakah vektor $\boldsymbol{v_1} = (1,-2,5)$, $\boldsymbol{v_2} = (-5,4,-1)$, dan $\boldsymbol{v_3} = (-1,0,3)$ merupakan bebas linier atau bergantung linier di R^3?

Penyelesaian:

Vektor-vektor yang bebas linier dan memenuhi persamaan

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{0}$$

mempunyai koefisien $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$.

Untuk melihat apakah benar demikian, mari kita tulis ulang dalam bentuk komponen

$$k_1(1,-2,5) + k_2(-5,4,-1) + k_3(-1,0,3) = (0{,}0{,}0)$$
$$(k_1,-2k_1,5k_1) + (-5k_2,4k_2,-k_2) + (-k_3,0,3k_3) = (0{,}0{,}0)$$
$$(k_1 - 5k_2 - k_3, -2k_1 + 4k_2, 5k_1 - k_2 + 3k_3) = (0{,}0{,}0)$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang bersesuaian pada kedua sisi akan menghasilkan sistem linier yang homogen

$$k_1 - 5k_2 - k_3 = 0$$
$$-2k_1 + 4k_2 = 0$$
$$5k_1 - k_2 + 3k_3 = 0$$

Untuk mencari solusi dari sistem linier di atas dapat menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, dan menghasilkan

$$k_1 = -\frac{2}{3}t, k_2 = \frac{1}{3}t, k_3 = t$$

Karena semua koefisien yang diperoleh tidak sama dengan nol, maka dapat disimpulan bahwa $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, dan $\boldsymbol{v}_3$ merupakan himpunan bergantung linier (*linearly dependent*).

Karena kita telah mengetahui bahwa vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, dan $\boldsymbol{v}_3$ bergantung linier, maka salah satu vektor tersebut merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya, misalnya

$$-\frac{2}{3}t\boldsymbol{v_1} + \frac{1}{3}t\boldsymbol{v_2} + t\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{0}$$
$$t\boldsymbol{v_3} = \frac{2}{3}t\boldsymbol{v_1} - \frac{1}{3}t\boldsymbol{v_2}$$
$$\boldsymbol{v_3} = \frac{2}{3}\boldsymbol{v_1} - \frac{1}{3}\boldsymbol{v_2}$$

Latihan Soal 6.3.

1. Tentukan apakah vektor-vektor di R^4 berikut ini

   $(3, 8, 7, -3), (12, 25, 3, -1), (-3, -1, 2, 6), (6, 2, -4, 4)$

   bebas linier atau bergantung linier.

2. Di bawah ini, tentukan apakah vektor-vektor merupakan bebas linier atau bergantung linier di P_2.
   a. $2 - 2x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 7x - x^2$
   b. $1 + 3x - 7x^2, -3 + 5x + x^2, 2 + 6x - 14x^2$

3. Tentukan apakah vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1 = (0, 2, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3, 0, -1)$, $\boldsymbol{v_3} = (4, -6, 1)$ dan $\boldsymbol{v_4} = (3, 4, 1)$ merupakan bebas linier atau bergantung linier di R^3?

4. Tentukan apakah matriks di M_{22} berikut ini bebas linier atau bergantung linier.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Diketahui vektor-vektor sebagai bagikut

$$\boldsymbol{v}_1 = (-1, 5, 4)\ , \boldsymbol{v}_2 = (-4, 2, 1), \text{ dan } \boldsymbol{v}_3 = (6, 6, 6).$$

   a. Tunjukkan bahwa $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, dan $\boldsymbol{v}_3$ merupakan himpunan bergantung linier (*linearly dependent*).
   b. Tunjukkan bahwa salah satu vektor tersebut merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya.

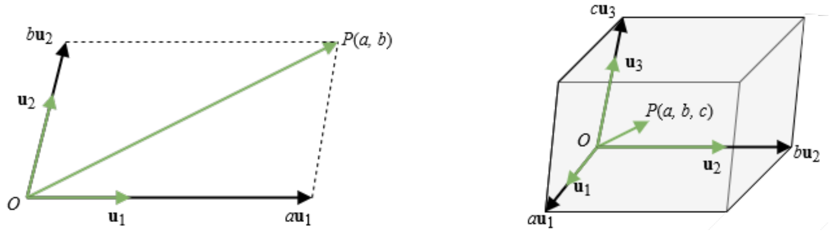
6. Tunjukkan bahwa tiga vektor $\boldsymbol{v}_1 = (0, 2, 1, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3, 0, 1, 2)$, dan $\boldsymbol{v}_3 = (12, -6, 1, 11)$ membentuk himpunan bergantung linier di R^4. Kemudian nyatakan setiap vektor tersebut sebagai kombinasi linier dari yang lainnya.

6.4. KOORDINAT DAN BASIS

KOORDINAT

Dalam sistem koordinat aljabar linier biasanya ditentukan menggunakan vektor daripada sumbu koordinat. Contohnya, titik P menggunakan koefisien skalar dalam persamaan

$$\overline{OP} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 \text{ dan } \overline{OP} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3$$



Gambar 6.4.1 Titik P dalam sistem koordinat aljabar linier

MEMBANGUN HIMPUNAN

Subruang W disebut subruang dari V yang **dibangun/direntang** oleh S. Vektor $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_r}$ dalam S dikatakan ***membangun*** (***span***) W, ditulis dengan

$$W = span\{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_r}\} \text{ atau } W = span(S)$$

Prosedur Untuk Mengidentifikasi Himpunan Rentang (Span)

Langkah 1. Misalkan $S = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_r}\}$ adalah himpunan vektor tertentu di V, dan misalkan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor sembarang di V.

Langkah 2. Susun matriks yang diperbesar (*augmented matrix*) dari sistem linier yang dihasilkan dengan menyamakan komponen-komponen yang bersesuaian pada kedua sisi persamaan vektor

$$k_1\boldsymbol{w_1} + k_2\boldsymbol{w_2} + \ldots + k_r\boldsymbol{w_r} = \boldsymbol{x}$$

Langkah 3. Selidiki apakah sistem linier konsistens atau tidak. Jika konsisten untuk semua pilihan vektor $\boldsymbol{x}$, maka vektor-vektor di S membangun/merentang V, dan jika tidak konsisten untuk beberapa vektor $\boldsymbol{x}$, maka vektor-vektor tersebut tidak membangun/merentang V.

Contoh 1

Tentukan apakah vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 4, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2, -4, 2)$, dan $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 2, 3)$ membangun/merentang ruang vektor R^3.

Penyelesaian:

Kita harus menentukan apakah vektor sembarang $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{b}$$
$$k_1(-2, 4, -1) + k_2(2, -4, 2) + k_3(-1, 2, 3) = (b_1, b_2, b_3)$$
$$(-2k_1, 4k_1, -k_1) + (2k_2, -4k_2, 2k_2) + (-k_3, 2k_3, 3k_3) = (b_1, b_2, b_3)$$
$$(-2k_1 + 2k_2 - k_3, 4k_1 - 4k_2 + 2k_3, -k_1 + 2k_2 + 3k_3) = (b_1, b_2, b_3)$$

diperoleh persamaan sistem linier:

$$\begin{aligned} -2k_1 + 2k_2 - k_3 &= b_1 \\ 4k_1 - 4k_2 + 2k_3 &= b_2 \\ -k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Matriks koefisien sistem linier di atas adalah

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jika ukuran/ordo matriks koefisien yang diperoleh $n \times n$, maka langkah selanjutnya adalah mencari determinan.

Ukuran/ordo matriks A di atas adalah 3×3, maka

$$det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Salah satu cara untuk menyatakan bahwa sistem konsisten yaitu jika dan hanya jika matriks koefisien sistem linier mempunyai determinan bukan nol. Namun hal ini tidak terjadi disini karena $det(A) = 0$, jadi $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, dan $\boldsymbol{v}_3$ tidak membangun/merentang ruang vektor R^3.

Contoh 2

Tentukan apakah himpunan $S = \{1 + x, x, 1 + x - x^2, 1 - x + x^2\}$ membangun P_2.

Petunjuk: Vektor sembarang di P_2 dalam bentuk $\boldsymbol{p} = a + bx + cx^2$.

Penyelesaian:

Kita harus menentukan apakah vektor sembarang $\boldsymbol{p} = a + bx + cx^2$ di P_2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

$$k_1\boldsymbol{w_1} + k_2\boldsymbol{w_2} + k_3\boldsymbol{w_3} + k_4\boldsymbol{w_4} = \boldsymbol{p}$$

$$k_1(1 + x) + k_2(x) + k_3(1 + x - x^2) + k_4(1 - x + x^2) = a + bx + cx^2$$
$$k_1 + k_1x + k_2x + k_3 + k_3x - k_3x^2 + k_4 - k_4x + k_4x^2 = a + bx + cx^2$$
$$(k_1 + k_3 + k_4) + (k_1x + k_2x + k_3x - k_4x) + (-k_3x^2 + k_4x^2) = a + bx + cx^2$$
$$(k_1 + k_3 + k_4) + (k_1 + k_2 + k_3 - k_4)x + (-k_3 + k_4)x^2 = a + bx + cx^2$$

diperoleh persamaan sistem linier:

$$\begin{aligned} k_1 + k_3 + k_4 &= a \\ k_1 + k_2 + k_3 - k_4 &= b \\ -k_3 + k_4 &= c \end{aligned}$$

Matriks koefisien sistem linier di atas adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ukuran/ordo matriks A di atas adalah 3×4. Matriks A bukan merupakan matriks persegi, maka cari *augmented matrix*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 & 1 & c \end{bmatrix}$$

Kita harus menggunakan eliminasi Gauss-Jordan untuk menghasilkan eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & a+c \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -a+b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -c \end{bmatrix}$$

Hasil bentuk eselon baris tereduksi di atas adalah konsisten (mempunyai solusi tak hingga banyak) untuk setiap pilihan a, b, c. Jadi vektor-vektor dalam S membangun P_2 yang dapat kita nyatakan dengan menulis $span(S) = P_2$.

BASIS UNTUK RUANG VEKTOR

Arah vektor basis membentuk arah positif, dan panjang vektor basislah yang menentukan jarak antara titik-titik bilangan bulat pada sumbu.

Definisi 1

Jika $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah himpunan vektor di ruang vektor berdimensi-hingga V maka S disebut basis untuk V jika:

(a) S membangun (*span*) V

(b) S bebas linier (*linearly independent*)

Contoh 3

Tunjukkan bahwa vektor $\boldsymbol{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3, 1, 0)$, dan $\boldsymbol{v}_3 = (-2, -1, 0)$ membentuk sebuah basis untuk R^3.

Penyelesaian:

Kita harus menunjukkan bahwa vektor-vektor ini merentang/membangun R^3 dan bebas linier.

Untuk membuktikan bahwa vektor-vektor tersebut merentang/membangun R^3 kita harus menunjukkan bahwa setiap vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ pada R^3 pada R^3 dapat dinyatakan sebagai

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{b}$$
$$c_1(1, -2, 1) + c_2(3, 1, 0) + c_3(-2, -1, 0) = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Matriks koefisien di atas adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ordo/ukuran matriks A adalah 3×3, maka

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

karena $det(A) \neq 0$, jadi $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, dan $\boldsymbol{v}_3$ membangun/merentang ruang vektor R^3.

Untuk membuktikan independensi linier kita harus menunjukkan persamaan vektor di bawah ini hanya mempunyai solusi trivial.

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$
$$c_1(1, -2, 1) + c_2(3, 1, 0) + c_3(-2, -1, 0) = (0, 0, 0)$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh bentuk eselon baris terduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan eselon baris tereduksi di atas, nilai $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$. Kita mendapatkan solusi trivial, sehingga vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ bebas linier.

Dapat disimpulkan bahwa vektor $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ membentuk basis untuk R^3.

Definisi 2

Jika $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V, dan

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

adalah pernyataan untuk vektor $\boldsymbol{v}$ dalam ketentuan/syarat basis S, maka skalar $c_1, c_2, \dots, c_n$ disebut ***koordinat*** dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis S. Vektor $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ dalam R^n yang dibangun dari koordinat ini disebut ***vektor koordinat dari v relatif terhadap S***; dan dinotasikan dengan

$$(\boldsymbol{v})_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Contoh 4

Diketahui bahwa vektor

$$\boldsymbol{v}_1 = (-1, 2, 4),\ \boldsymbol{v}_2 = (0, 3, -3),\ \text{dan}\ \boldsymbol{v}_3 = (5, 2, -20)$$

membentuk sebuah basis untuk R^3.

a. Tentukan vektor koordinat dari $\boldsymbol{v} = (1, 4, 2)$ relatif terhadap basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.
b. Tentukan vektor $\boldsymbol{v}$ di R^3 yang vektor koordinat relatifnya terhadap S adalah $(\boldsymbol{v})_S = (-1, 5, 2)$.

Penyelesaian:

a. Untuk mencari $(\boldsymbol{v})_S$ pertama-tama kita harus menyatakan $\boldsymbol{v}$ sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di S; artinya, kita harus mencari nilai c_1, c_2, c_3 sedemikian rupa sehingga

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3$$
$$(1, 4, 2) = c_1(-1, 2, 4) + c_2(0, 3, -3) + c_3(5, 2, -20)$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang bersesuaian menghasilkan

$$\begin{aligned} -c_1 + 5c_3 &= 1 \\ 2c_1 + 3c_2 + 2c_3 &= 4 \\ 4c_1 - 3c_2 - 20c_3 &= 2 \end{aligned}$$

Setelah menyelesaikan sistem ini dengan eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh $c_1 = 4, c_2 = -2, c_3 = 1$. Oleh karena itu

$$(\boldsymbol{v})_S = (4, -2, 1)$$

b. Jika $(\boldsymbol{v})_S = (-1, 5, 2)$, maka $c_1 = -1, c_2 = 5, c_3 = 2$. Dengan menggunakan definisi $(\boldsymbol{v})_S$, kita peroleh

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3$$
$$\boldsymbol{v} = -1(-1, 2, 4) + 5(0, 3, -3) + 2(5, 2, -20)$$
$$\boldsymbol{v} = (1, -2, -4) + (0, 15, -15) + (10, 4, -40)$$
$$\boldsymbol{v} = (11, 17, -59)$$

Latihan Soal 6.4

1. Jika diketahui vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 1, 0, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3, -1, 5, 2)$, dan $\boldsymbol{v}_3 = (-2, 0, 2, 1)$, manakah dari vektor berikut yang berada dalam rentang $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$?
   a. $(2, 4, -6, 9)$
   b. $(1, 1, -2, 1)$.
2. Tentukan apakah himpunan berikut ini membangun P_2 atau tidak.
   $S = \{-1 + x + x^2, x + x^2, 1 + x + x^2, 1 - x\}$
3. Tunjukkan bahwa matriks di bawah ini membentuk sebuah basis untuk M_{22}.
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
4. Tunjukkan bahwa himpunan vektor berikut ini membangun sebuah basis untuk R^3.
   $$\{(2, 1, 0), (-2, 1, 6), (1, -4, 2)\}.$$
5. Diketahui $\boldsymbol{v} = (4, -5, 0)$; $\boldsymbol{v}_1 = (2, 2, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-4, 5, 6)$, dan $\boldsymbol{v}_3 = (6, 0, 3)$. Tentukan vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif ke basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ untuk R^3.
6. Tunjukkan bahwa himpunan $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ adalah basis M_{22}, kemudian nyatakan A sebagai kombinasi linier dari vektor di S, dan tentukan vektor koordinat dari A relatif terhadap S.
   $$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

6.5. DIMENSI

Definisi 1

Dimensi dari ruang vektor berdimensi-hingga dinotasikan dan didefinisikan menjadi jumlah vektor di sebuah basis untuk . Selanjutnya, ruang vektor nol didefinisikan mempunyai dimensi nol.

Contoh 1

Tentukan basis dan dimensi ruang solusi dari sistem homogen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \quad x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 3x_3 \qquad\qquad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + \qquad\quad 8x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Bentuk matriks yang diperbesar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Apabila matriks tersebut diselesaikan dengan eliminasi Gauss-Jordan, maka akan diperoleh eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi umum sistem linier tersebut adalah

$$x_1 = 3t, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -t, \quad x_5 = t$$

Dapat kita tuliskan dalam bentuk vektor:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3t, 0, 0, -t, t)$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t(3, 0, 0, -1, 1)$$

Hal ini menunjukkan bahwa vektor $\boldsymbol{v}_1 = (3, 0, 0, -1, 1)$ membentuk basis ruang solusi. Jadi, basis ruang solusinya adalah $\{(3, 0, 0, -1, 1)\}$ dan ruang solusinya berdimensi 1.

Contoh 2

Tentukan basis dan dimensi ruang solusi dari sistem homogen:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Bentuk matriks yang diperbesar:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Apabila matriks tersebut diselesaikan dengan eliminasi Gauss-Jordan, maka akan diperoleh eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi umum sistem linier tersebut adalah $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Jadi, ruang solusinya tidak mempunyai basis dan dimensinya 0.

Latihan Soal 6.5

Pada Latihan nomor 1-3, tentukan basis untuk ruang solusi dari sistem linier homogen berikut ini dan tentukan dimensi dari ruang solusi tersebut.

1. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 &= 0 \\ x_1 + x_3 + 5x_4 + 7x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Pada Latihan nomor 4-5, tentukan basis untuk subruang dari R^3 bidang tersebut dan dan nyatakan dimensinya

4. $2x - 3y + 5z = 0$

5. $x - 2y = 0$

6. Tentukan basis dan dimensi ruang solusi dari sistem linier yang disajikan dalam bentuk perkalian matriks berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal Bab VI

1. Tentukan apakah himpunan semua pasangan bilangan real dalam bentuk $(2, a)$ dengan operasi:

   $(2, b) + (2, b') = (2, b + b')$ dan $k(2, b) = (2, kb)$

   merupakan ruang vektor. Jika bukan ruang vektor, tentukan aksioma ruang vektor yang gagal.

2. Tentukan apakah himpunan V yang terdiri dari semua matriks berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$ merupakan subruang dari M_{22}.

3. Tentukan apakah himpunan W yang terdiri dari semua matriks A berukuran 2×2sedemikian sehingga $A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ merupakan subruang M_{22}.

4. Gunakan uji subruang untuk menentukan apakah himpunan semua vektor yang berbentuk $(0, b, 0)$ merupakan subruang dari R^3.

5. Diketahui $\boldsymbol{u} = (1, 1, -3, 4)$, $\boldsymbol{v} = (2, -2, 3, 1)$ dan $\boldsymbol{w} = (-3, 1, 1, 0)$ pada R^4. Apakah $\boldsymbol{x} = (5, 1, -4, 0)$ merupakan kombinasi linier dari $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$? Jelaskan!

6. Tunjukan bahwa matriks $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ merupakan kombinasi linier dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Tunjukkan bahwa $(-5, -3,\ 8)$ merupakan kombinasi linier dari
$$\boldsymbol{u} = (-1, -3, 0), \boldsymbol{v} = (4, 9, -2).$$

8. Manakah di bawah ini yang merupakan kombinasi linier dari
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}?$$
   a. $\begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

9. Tentukan apakah vektor-vektor di R^3 berikut ini
$$(1, 1, 3), (4, -3, -1), (-1, -1, 0)$$
bebas linier atau bergantung linier.

10. Jelaskan mengapa bentuk vektor berikut ini merupakan himpunan bergantung linier.
    a. $\boldsymbol{u}_1 = (-1, -2, 4)$, dan $\boldsymbol{u}_2 = (3, 6, -12)$
    b. $\boldsymbol{v}_1 = (3, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (6, -5)$ dan $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1)$

11. Tentukan apakah matriks di M_{22} berikut ini bebas linier atau bergantung linier.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

12. Diketahui matriks-matriks berikut ini:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$
    a. Tunjukkan bahwa matriks A, B, dan C merupakan himpunan bergantung linier (*linearly dependent*).
    b. Tunjukkan bahwa salah satu matriks tersebut merupakan kombinasi linier dari matriks-matriks lainnya.

    (Lihat gambar 6.4.1, contohnya titik P menggunakan koefisien skalar dalam persamaan)

13. Tunjukkan bahwa matriks berikut tidak membentuk sebuah basis untuk M_{22}.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Tunjukkan bahwa himpunan vektor berikut ini membangun sebuah basis untuk R^3.

$$\{(1,1,-4),(-2,5,6),(1,-4,-3)\}.$$

15. Jika vektor $\boldsymbol{v} = (-4,6,1); \boldsymbol{v}_1 = (0,2,-3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,0,6)$, dan $\boldsymbol{v}_3 = (3,-2,3)$, tentukan vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif ke basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ untuk R^3.

16. Tunjukkan bahwa himpunan $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ adalah basis M_{22}, kemudian nyatakan A sebagai kombinasi linier dari vektor di S, dan tentukan vektor koordinat dari A relatif terhadap S.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Pada Latihan nomor $17-19$, tentukan basis untuk ruang solusi dari sistem linier homogen berikut ini dan tentukan dimensi dari ruang solusi tersebut.

17. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 &= 0 \\ x_1 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ -3x_3 + 9x_4 + 6x_5 &= 0 \end{aligned}$$

20. Diketahui garis $x = -t, y = 4t, z = 7t,$ tentukan basis untuk subruang dari R^3 tersebut dan dan nyatakan dimensinya.

Bab VII
TRANSFORMASI LINIER

7.1. PENGANTAR TRANSFORMASI LINIER

FUNGSI DAN TRANSFORMASI

Definisi

Jika f adalah fungsi dengan domain R^n dan kodomain R^m, f adalah ***transformasi*** dari R^n ke R^m atau ***peta*** dari R^n ke R^m dapat dinotasikan dengan

$$f: R^n \rightarrow R^m$$

Pada kasus khusus dimana $n = m$, maka transformasi tersebut disebut ***operator*** dalam R^n.

TRANSFORMASI MATRIKS

Misal diberikan sistem persamaan linier:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Penulisan dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Secara singkat dapat ditulis dengan $\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{x}$

Dari persamaan sebelumnya menunjukkan adanya transformasi, yaitu peta vektor $\boldsymbol{x}$ di R^n ke vektor $\boldsymbol{w}$ di R^m, mengalikan $\boldsymbol{x}$ dengan sebelah kirinya A. Hal ini disebut dengan ***transformasi matriks*** (***atau operator matriks*** pada kasus khusus dimana $m = n$). Notasinya adalah

$$T_A : R^n \rightarrow R^m$$

Subscript pada T_A berfungsi sebagai pengingat hasil transformasi dari perkalian vektor di R^n dengan matriks A, jadi

$$\boldsymbol{w} = T_A(\boldsymbol{x})$$

kita sebut Transformasi T_A ***perkalian dengan*** A.

Bentuk skematiknya: $\boldsymbol{x} \xrightarrow{T_A} \boldsymbol{w}$ (dibaca "T_A memetakan $\boldsymbol{x}$ ke $\boldsymbol{w}$").

Contoh 1

Transformasi matriks dari R^4 ke R^3 didefinisikan dengan persamaan

$$\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \\ w_3 &= x_1 - x_2 + 6x_3 \end{aligned}$$

dapat disajikan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

dari matriks di atas kita melihat bahwa transformasi dapat diartikan sebagai perkalian dengan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, maka hasil transformasi matriks dari R^4 ke R^3 adalah

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 32 \\ 10 \end{bmatrix}$$

SIFAT TRANSFORMASI MATRIKS

Teorema 7.1.1

$T: R^n \to R^m$ adalah transformasi matriks jika dan hanya jika memenuhi untuk semua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di R^n dan untuk semua skalar k:

(i) $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ [Sifat penjumlahan]
(ii) $T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u})$ [Sifat homogenitas]

Sifat penjumlahan dan homogenitas di Teorema 7.1.1 disebut ***kondisi linieritas*** dan transformasi yang memenuhi kondisi tersebut disebut ***transformasi linier.***

Contoh 2

Tunjukkan bahwa $T(x,y) = (x+2y, x+y)$ adalah transformasi matriks!

Penyelesaian:

Jika $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ maka

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= T(u_1+v_1, u_2+v_2) \\ &= ((u_1+v_1)+2(u_2+v_2), (u_1+v_1)+(u_2+v_2)) \\ &= (u_1+v_1+2u_2+2v_2\,, u_1+v_1+\ u_2+v_2) \\ &= (u_1+2u_2\,, u_1+u_2)+(v_1+2v_2\,, v_1+v_2) \\ &= T(\boldsymbol{u})+T(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} T(k\boldsymbol{u}) &= T(ku_1, ku_2) \\ &= (ku_1+2ku_2\,, ku_1+ku_2) \\ &= k(u_1+2u_2\,, u_1+u_2) \\ &= kT(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $T(x,y) = (x+2y, x+y)$ merupakan transformasi matriks.

Teorema 7.1.2

Setiap transformasi linier dari R^n ke R^m adalah transformasi matriks, demikian juga sebaliknya setiap transformasi matriks dari R^n ke R^m adalah transformasi linier

Teorema 7.1.3

Jika $T_A: R^n \to R^m$ dan $T_B: R^n \to R^m$ merupakan transformasi matriks, dan jika $T_A(\boldsymbol{x}) = T_B(\boldsymbol{x})$ untuk setiap vektor $\boldsymbol{x}$ di R^n, maka $A = B$.

Teorema di atas menyatakan bahwa terdapat ***korespondensi satu-satu*** antara matriks $m \times n$ dan transformasi matriks dari R^n ke R^m, dalam arti bahwa setiap matriks $m \times n$ A menghasilkan tepat satu transformasi matriks (perkalian dengan A) dan setiap transformasi matriks dari R^n ke R^m muncul dari tepat satu matriks $m \times n$; matriks itu disebut sebagai ***matriks standar*** untuk transformasi.

MATRIKS STANDAR

Matriks standar untuk transformasi linier $T: R^n \to R^m$ diberikan dengan rumus

$$A = [T(\boldsymbol{e}_1) \mid T(\boldsymbol{e}_2) \mid \dots \mid T(\boldsymbol{e}_n)|]$$

Langkah menentukan matriks standar untuk transformasi matriks:

Langkah 1 Tentukan peta/bayangan vektor basis standar $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ untuk R^n.

Langkah 2 Buat matriks yang mempunyai bayangan yang diperoleh dari langkah 1 sebagai kolom yang berurutan. Matriks ini adalah matriks standar untuk transformasi.

Contoh 3

Tentukan matriks standar A untuk transformasi linier $T: R^2 \to R^3$ yang didefinisikan dengan rumus

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 4x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, gunakan matriks standar A untuk menemukan hasil dari $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.

Penyelesaian:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 4x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

maka

$$T(\boldsymbol{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

dan

$$T(\boldsymbol{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix}$$

diperoleh matriks standar:

$$A = [T(\boldsymbol{e}_1) \mid T(\boldsymbol{e}_2)]$$

$$A = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 4\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

Jadi $T\left(\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 4\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\11\\4\end{bmatrix}$

Contoh 4

Tulis kembali transformasi $T(x_1, x_2) = (2x_1 + 5x_2, 8x_1 - 3x_2)$ pada bentuk vektor kolom dan tentukan matriks standarnya.

Penyelesaian:

Bentuk vektor kolom:

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x_1 + 5x_2\\8x_1 - 3x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 5\\8 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

Jadi, matriks standarnya adalah

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\8 & -3\end{bmatrix}$$

Contoh 5

Tentukan matriks standar A untuk transformasi linier $T: R^2 \to R^2$ dimana

$$T\left(\begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-21\\23\end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}26\\-14\end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Kita akan mencari peta vektor basis standar dengan menulis ulang vektor basis standar sebagai kombinasi linier dari

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan vektor yang pertama:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

persamaan vektor yang kedua:

persamaan vektor yang kedua:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan vektor di atas diperoleh

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{3}{4}, k_1 = \frac{1}{4}, k_2 = \frac{1}{8}$$

Kemudian dengan menggunakan sifat linieritas T, substitusikan nilai-nilai tersebut ke:

$$T(\boldsymbol{e}_1) = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 T \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} + c_2 T \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} T \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{3}{4} T \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -21 \\ 23 \end{bmatrix} + \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 26 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-21}{2} \\ \frac{23}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{39}{2} \\ -\frac{21}{2} \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-21}{2} + \frac{39}{2} \\ \frac{23}{2} - \frac{21}{2} \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$T(\boldsymbol{e}_2) = T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = k_1 T\begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix} + k_2 T\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}T\begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix} + \frac{1}{8}T\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-21\\23\end{bmatrix} + \frac{1}{8}\begin{bmatrix}26\\-14\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-21}{4}\\ \frac{23}{4}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{13}{4}\\ -\frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-21}{4} + \frac{13}{4}\\ \frac{23}{4} - \frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$$

Jadi matriks standar yang diperoleh adalah

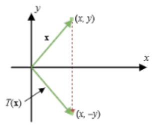
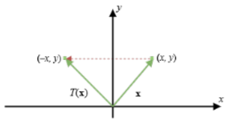
$$A = [T(\boldsymbol{e}_1) \mid T(\boldsymbol{e}_2)]$$

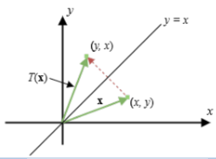
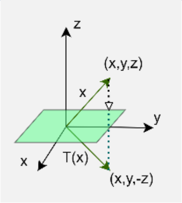
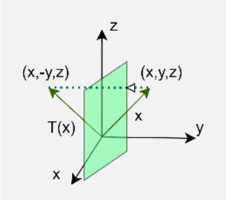
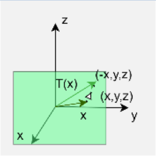
$$A = \begin{bmatrix}9 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}$$

OPERATOR PENCERMINAN

Operator matriks paling dasar pada R^2 dan R^3 adalah operator yang memetakan setiap titik ke dalam bayangan simetrisnya terhadap suatu garis tetap atau bidang tetap yang memuat titik asal; ini disebut ***operator refleksi*** atau ***operator pencerminan***. Tabel 7.2.1 menunjukkan matriks standar untuk refleksi.

Tabel 7.1.1

Operator	**Ilustrasi**	**Bayangan $\boldsymbol{e}_1$ dan $\boldsymbol{e}_2$**	**Matriks Standar**
Refleksi terhadap sumbu $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y})$		$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{T}(\mathbf{1},\mathbf{0}) = (\mathbf{1},\mathbf{0})$ $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{T}(\mathbf{0},\mathbf{1}) = (\mathbf{0},-\mathbf{1})$	$\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{bmatrix}$
Refleksi terhadap sumbu $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (-\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$		$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{T}(\mathbf{1},\mathbf{0}) = (-\mathbf{1},\mathbf{0})$ $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{T}(\mathbf{0},\mathbf{1}) = (\mathbf{0},\mathbf{1})$	$\begin{bmatrix}-\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$

Operator	Ilustrasi	Bayangan e_1 dan e_2	Matriks Standar
Refleksi terhadap garis $y = x$ $T(x, y) = (y, x)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (0, 1)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (1, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Refleksi terhadap bidang xy $T(x, y, z) = (x, y, -z)$		$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Refleksi terhadap bidang xz $T(x, y, z) = (x, -y, z)$		$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$ $T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Refleksi terhadap bidang yz $T(x, y, z) = (-x, y, z)$		$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Contoh 6

Gunakan perkalian matriks untuk mencari refleksi/ pencerminan titik $(-1, 5)$ terhadap sumbu-x.

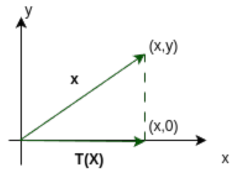
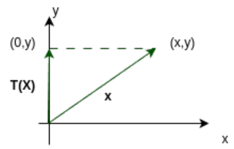
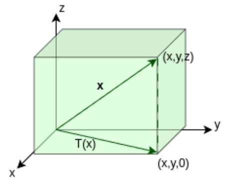
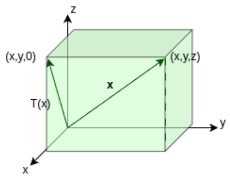
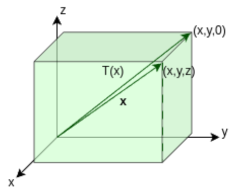
Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

OPERATOR PROYEKSI ORTOGONAL

Operator matriks pada R^2 dan R^3 yang memetakan setiap titik ke dalam proyeksi ortogonalnya ke suatu garis atau bidang tetap yang melalui titik asal disebut ***operator proyeksi*** (atau lebih tepatnya, ***operator proyeksi ortogonal***). Tabel 7.2.2 menunjukkan matriks standar untuk proyeksi ortogonal

Tabel 7.1.2 Matriks Standar untuk Proyeksi Ortogonal.

Operator	**Ilustrasi**	**Bayangan e_1 dan e_2**	**Matriks Standar**
Proyeksi orthogonal ke sumbu x $T(x,y) = (x,0)$		$T(\boldsymbol{e_1}) = T(1,0) =$ $(1,0)$ z	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$
Proyeksi orthogonal ke sumbu y $T(x,y) = (0,y)$		$T(\boldsymbol{e_1}) = T(1,0) =$ $(0,0)$ $T(\boldsymbol{e_2}) = T(0,1)$ $= (0,1)$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
Proyeksi orthogonal ke bidang xy $T(x,y,z)$ $= (x,y,0)$		$T(\boldsymbol{e_1}) = T(1,0,0) =$ $(1,0,0)$ $T(\boldsymbol{e_2}) = T(0,1,0) =$ $(0,1,0)$ $T(\boldsymbol{e_3}) = T(0,0,1)$ $= (0,0,0)$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$
Proyeksi orthogonal ke bidang xz $T(x,y,z)$ $= (x,0,z)$		$T(\boldsymbol{e_1}) = T(1,0,0) =$ $(1,0,0)$ $T(\boldsymbol{e_2}) = T(0,1,0) =$ $(0,0,0)$ $T(\boldsymbol{e_3}) = T(0,0,1)$ $= (0,0,1)$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Proyeksi orthogonal ke bidang yz $T(x,y,z)$ $= (0,y,z)$		$T(\boldsymbol{e_1}) = T(1,0,0) =$ $(0,0,0)$ $T(\boldsymbol{e_2}) = T(0,1,0) =$ $(0,1,0)$ $T(\boldsymbol{e_3}) = T(0,0,1)$ $= (0,0,1)$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Contoh 7

Gunakan perkalian matriks untuk mencari proyeksi ortogonal $(1, -3, 8)$ ke bidang-*xz*.

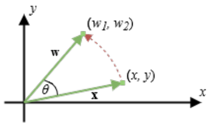
Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

OPERATOR ROTASI

Operator matriks pada R^2 yang memindahkan titik-titik sepanjang busur lingkaran yang berpusat di titik asal disebut ***operator rotasi***. Tabel 7.2.3 menunjukkan matriks standar untuk rotasi.

Tabel 7.1.3 Matriks Standar untuk Rotasi

Operator	Ilustrasi	Bayangan e_1 dan e_2	Matriks Standar
Rotasi berlawanan arah jarum jam terhadap titik asal dengan sudut θ		$T(\boldsymbol{e_1}) = T(1,0) =$ $(\cos\theta, \sin\theta)$ $T(\boldsymbol{e_2}) = T(0,1)$ $= (-\sin\theta, \cos\theta)$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Contoh 8

Gunakan perkalian matriks untuk mencari peta $(3, -1)$ jika dirotasi terhadap titik asal dengan sudut $-30°$.

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3} - 1}{2} \\ \frac{-3 - \sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Latihan Soal 7.1

1. Tentukan matriks standar untuk transformasi yang didefinisikan dengan rumus berikut:

$$w_1 = 3x_1 - 9x_2 - 8x_3$$
$$w_2 = -x_2 + 10x_3$$
$$w_3 = 4x_1 + 2x_2 - x_3$$

2. Tentukan matriks standar untuk transformasi T yang didefinisikan dengan rumus
   a) $T(x_1, x_2) = (8x_2, -x_1, 4x_1 + 3x_2, 2\,x_1 - x_2)$
   b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 - 2x_2 - 4\,x_3 + x_4, x_2 + 5x_3, -x_1)$

3. Tentukan matriks standar untuk operator $T: R^3 \to R^3$ yang didefinisikan dengan

$$w_1 = 2x_1 - 5x_2 + x_3$$
$$w_2 = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$w_3 = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3$$

   dengan substitusi langsung ke persamaan dan dengan perkalian matriks hitunglah:
   a) $T(-1, -2, 1)$
   b) $T(4, -6, 5)$

Pada Latihan nomor 4-5, tentukan matriks standar A untuk transformasi linier $T: R^2 \to R^2$.

4. $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

5. $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$

6. Tentukan matriks standar A untuk transformasi linier $T: R^3 \to R^3$ dimana

$$T\left(\begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}7\\-3\\2\end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\5\\4\end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\-7\\1\end{bmatrix}$$

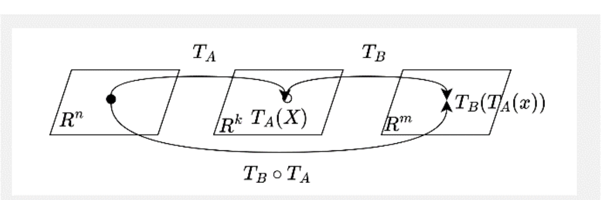
7. Tentukan proyeksi ortogonal (a, b) terhadap sumbu-x.
8. Tentukan peta titik (-1,9) jika diputar/dirotasi melalui titik asal dengan sudut 45°.

7.2. KOMPOSISI TRANSFORMASI MATRIKS

PENDAHULUAN KOMPOSISI TRANSFORMASI MATRIKS

"***Komposisi***" ***transformasi matriks*** adalah proses menerapkan transformasi matriks ke vektor kemudian menerapkan transformasi matriks lain ke vektor bayangan. Misalnya, T_A adalah transformasi matriks dari R^n ke R^k dan T_B adalah transformasi matriks dari R^k ke R^m. Jika $\boldsymbol{x}$ adalah vektor dalam R^n, maka T_A memetakan vektor ini menjadi vektor $T_A(\boldsymbol{x})$ dalam R^k, dan T_B memetakan vektor tersebut ke dalam vektor $T_B(T_A(\boldsymbol{x}))$dalam R^m. Proses ini menciptakan transformasi langsung dari R^n ke R^m yang kita sebut ***komposisi*** $\boldsymbol{T_B}$ ***dengan*** $\boldsymbol{T_A}$ dan yang dilambangkan $T_B \circ T_A$ (dibaca "T_B bundaran T_A"). Komposisi T_B dengan T_A diilustrasikan pada Gambar 7.2.1.

$$(T_B \circ T_A)(\boldsymbol{x}) = T_B(T_A(\boldsymbol{x}))$$



Gambar 7.2.1 Komposisi T_A dengan T_B

Teorema 7.2.1

Jika $T_A: R^n \to R^m$ dan $T_B: R^n \to R^m$ merupakan transformasi matriks, maka $T_B \circ T_A$ adalah transformasi matriks dan

$$T_B \circ T_A = T_{BA}$$

SIFAT KOMUTATIF PADA TRANSFORMASI MATRIKS

Secara umum perkalian matriks $AB \neq BA$, maka $T_{AB} \neq T_{BA}$. Dalam bentuk umum

$$T_B \circ T_A \neq T_A \circ T_B$$

Dengan demikian, *komposisi transformasi matriks tidak bersifat komutatif*.

Sehingga matriks standar untuk transformasi $T_B \circ T_A = T_{BA}$ adalah BA, sedangkan matriks standar untuk transformasi $T_A \circ T_B = T_{AB}$ adalah AB.

Contoh

Jika $T_1: R^3 \to R^2$ dan $T_2: R^2 \to R^3$ merupakan transformasi linier yang diberikan dengan

$$T_1(x, y, z) = (2x - y, x - 2y + 3z)$$

dan

$$T_2(x, y) = (6x + y, -x, x + 4y)$$

Tentukan matriks standar untuk $T_1 \circ T_2$.

Penyelesaian:

$$T_1(\boldsymbol{e}_1) = (2, 1), T_1(\boldsymbol{e}_2) = (-1, -2), T_1(\boldsymbol{e}_3) = (0, 3)$$

maka matriks standar T_1 adalah

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T_1(\boldsymbol{e}_1) = (2, 1), T_1(\boldsymbol{e}_2) = (-1, -2), T_1(\boldsymbol{e}_3) = (0, 3)$$

maka matriks standar T_1 adalah

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, matriks standar untuk $T_1 \circ T_2$ adalah

$$T_1 \circ T_2 = T_{12} = AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal 7.2

1. Diketahui bahwa

   $T_1: R^2 \to R^2$ adalah proyeksi ortogonal terhadap sumbu-*y* dan
   $T_2: R^2 \to R^2$ adalah rotasi terhadap titik asal dengan sudut $-45°$.
   Tentukan $T_2 \circ T_1$ dan $T_1 \circ T_2$.

Pada Latihan nomor 2 - 3, temukan matriks standar untuk $T_A \circ T_B$ dan $T_B \circ T_A$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 9 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

4. Diketahui matriks berikut ini

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -6 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

   a. Tentukan matriks standar untuk $T_A \circ T_B$
   b. Jelaskan kenapa $T_B \circ T_A$ tidak dapat didefinisikan.

5. Temukan matriks standar untuk komposisi yang dinyatakan dalam R^2 berikut ini:

   Refleksi terhadap sumbu -y, diikuti dengan rotasi pada titik asal dengan sudut 90^0.

6. Misal $T_1(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 - 2x_2, x_1 + 4x_2)$ dan $T_2(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - x_2, -x_1 + x_3, x_2 - 6x_3)$. Tentukan matriks standar untuk $T_2 \circ T_1T1$ dan $T_1 \circ T_2$.

7. Misal $T_1: R^2 \rightarrow R^4$ dan $T_2: R^4 \rightarrow R^3$diberikan sebagai

$$T_1(x, y) = (2y, -x, x - y, x + 3y)$$
$$T_2(x, y, z, w) = (2x - w, y + 3w, z - w).$$

   a. Tentukan matriks standar untuk T_1dan T_2.
   b. Tentukan matriks standar untuk $T_2 \circ T_1$.
   c. Jelaskan kenapa $T_1 \circ T_2$ tidak dapat didefinisikan.

7.3. MENEMUKAN TRANSFORMASI LINIER

Teorema 7.3.1

Misal $T: V \rightarrow W$ adalah transformasi linier, dimana V mempunyai dimensi terbatas. Jika $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ merupakan basis untuk V, maka bayangan dari sembarang vektor $\boldsymbol{v}$ di V dapat dinyatakan sebagai

$$T(\boldsymbol{v}) = c_1 T(\boldsymbol{v}_1) + c_2 T(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n T(\boldsymbol{v}_n)$$

dimana $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah koefisien yang diperlukan untuk menyatakan $\boldsymbol{v}$ sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor dalam basis S.

Contoh 6

Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ untuk R^3, di mana

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0), \boldsymbol{v}_2 = (1, 0, 0), \boldsymbol{v}_3 = (-1, -1, 1).$$

Misalkan $T: R^3 \rightarrow R^2$ adalah transformasi linier di mana

$$T(\boldsymbol{v}_1) = (2, 0), T(\boldsymbol{v}_2) = (1, -1), T(\boldsymbol{v}_3) = (-2, 3).$$

Temukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2,\ x_3)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung $T(2, -3,\ 5)$.

Penyelesaian:

Pertama-tama kita perlu menyatakan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sebagai kombinasi linier dari $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ dan $\boldsymbol{v}_3$. Jika kita menulis

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3$$
$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 0) + c_2(1, 0, 0) + c_3(-1, -1, 1)$$

kemudian dengan menyamakan komponen-komponen yang bersesuaian, kita peroleh

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 - c_3 &= x_1 \\ c_1 \qquad - c_3 &= x_2 \\ c_3 &= x_3 \end{aligned}$$

yang menghasilkan

$$c_1 = x_2 + x_3$$
$$c_2 = x_1 - x_2$$
$$c_3 = x_3$$

sehingga

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)(1,1,0) + (x_1 - x_2)(1,0,0) + (x_3)(-1,-1,1)$$
$$(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)\boldsymbol{v}_1 + (x_1 - x_2)\boldsymbol{v}_2 + (x_3)\boldsymbol{v}_3$$

Jadi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)T(v_1) + (x_1 - x_2)T(v_2) + (x_3)T(v_3)$$
$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)(2,0) + (x_1 - x_2)(1,-1) + (x_3)(-2,3)$$
$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + 2x_3, 0) + (x_1 - x_2, -x_1 + x_2) + (-2x_3, 3x_3)$$
$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2 + 3x_3)$$

Dengan menggunakan rumus di atas kita bisa memperoleh

$$\begin{aligned} T(2,-3,\quad 5) &= (2 + (-3), -2 + (-3) + 3(5)) \\ &= (2 - 3, -2 - 3 + 15) \\ &= (-1, 10) \end{aligned}$$

Latihan Soal 7.3

1. Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ untuk R^2, di mana

   $$\boldsymbol{v}_1 = (2,1), \boldsymbol{v}_2 = (4,3),$$

   dan misalkan $T: R^2 \to R^2$ adalah transformasi linier di mana

   $$T(\boldsymbol{v}_1) = (-2,0), T(\boldsymbol{v}_2) = (0,4).$$

   Tentukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung $T(1,5)$.

2. Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ untuk R^2, di mana

   $$\boldsymbol{v}_1 = (2,3), \boldsymbol{v}_2 = (2,1),$$

   dan misalkan $T: R^2 \to R^2$ adalah transformasi linier di mana

   $$T(\boldsymbol{v}_1) = (4,4), T(\boldsymbol{v}_2) = (0,12).$$

   Tentukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung $T(10,3)$.

3. Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ untuk R^2, di mana
$$\boldsymbol{v}_1 = (0, 1), \boldsymbol{v}_2 = (2, 0),$$
dan misalkan $T: R^2 \rightarrow R^4$ adalah transformasi linier di mana
$$T(\boldsymbol{v}_1) = (3, 1, -2, 0), T(\boldsymbol{v}_2) = (2, 0, 4, -2).$$
Tentukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung $T(6, -1)$.

4. Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ untuk R^2, di mana
$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 3), \boldsymbol{v}_2 = (-2, -7).$$
Misalkan $T: R^2 \rightarrow R^3$ adalah transformasi linier di mana
$$T(\boldsymbol{v}_1) = (1, 2, 2), T(\boldsymbol{v}_2) = (1, -1, 3).$$
Tentukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung:
a) $T(8, 12)$
b) $T(4, -5)$

5. Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ untuk R^3, di mana
$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 1), \boldsymbol{v}_2 = (-1, 0, 1), \boldsymbol{v}_3 = (1, -2, -6).$$
Misalkan $T: R^3 \rightarrow R^2$ adalah transformasi linier di mana
$$T(\boldsymbol{v}_1) = (1, 1), T(\boldsymbol{v}_2) = (-1, 1), T(\boldsymbol{v}_3) = (0, 1)$$
Tentukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2,\ x_3)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung $T(2, 1,\ 2)$.

6. Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ untuk R^3, di mana
$$\boldsymbol{v}_1 = (2, 0, 0), \boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 3), \boldsymbol{v}_3 = (2, 0, 1),$$
dan misalkan $T: R^3 \rightarrow R^4$ adalah transformasi linier di mana
$$T(\boldsymbol{v}_1) = (2, 0, 0, 0), T(\boldsymbol{v}_2) = (1, 2, 3, 4), T(\boldsymbol{v}_3) = (1, 0, -1, 0)$$
Tentukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2,\ x_3)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung $T(2, 1,\ 3)$.

7. Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ untuk R^3, di mana
$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0), \boldsymbol{v}_2 = (2, -1, 1), \boldsymbol{v}_3 = (2, 1, 0),$$
dan misalkan $T: R^3 \rightarrow R^3$ adalah transformasi linier di mana
$$T(\boldsymbol{v}_1) = (1, 1, 1), T(\boldsymbol{v}_2) = (3, 2, 1), T(\boldsymbol{v}_3) = (1, 0, 0).$$
Tentukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2,\ x_3)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung:
a. $T(5, 4, -3)$
b. $T(9, -3, 1)$

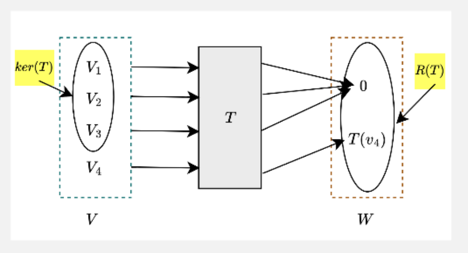
7.4. KERNEL DAN RANGE

Definisi

Jika T : V → W adalah sebuah transformasi linier maka

- Himpunan vektor – vektor pada V yang dipetakan oleh T ke 0 disebut kernel dari T yang dinotasikan dengan ker(T).
- Himpunan semua vektor pada W yang merupakan hasil pemetaan oleh T terhadap paling tidak satu vektor pada V disebut Range dari T, dinyatakan dengan R(T). Lihat gambar 7.4.1

$$\text{Ker}(T) = \{ v \in V \mid T(v) = 0\}$$
$$R(T) = \{w \in W \mid w = T(v) \text{ untuk suatu } v \in V$$



Gambar 7.4.1 Kernel dan Range

Jika T : V → W suatu pemetaan linier , maka kernel T adalah sub ruang dari V dan range T adalah sub ruang dari W.

Bukti :

Telah dibuktikan bahwa T(0) = 0, maka 0 ∈ ker(T) sehingga ker(T) tidak kosong. Selanjutnya ambil sebarang v_1, v_2 ∈ ker(T), maka $T(v_1) = 0$ dan $T(v_2) = 0$ sehingga

$T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$

Jadi $v_1 + v_2 \in$ ker(T)

$T(\alpha v_1) = \alpha\ T(v_1) = \alpha \cdot 0 = 0$

Jadi $\alpha v_1 \in$ ker(T). Jadi ker(T) sub ruang dari V. Terbukti.

Telah dibuktikan bahwa T(0) = 0, maka $0 \in R(T)$ sehingga R(T) tidak kosong.
Selanjutnya ambil sebarang $x,y \in R(T)$ dan $\beta \in R$, maka x = T(a) dan y = T(b) untuk suatu $a, b \in V$. Maka
$x + y = T(a) + T(b) = T(a+b)$

Karena $a,b \in V$ maka $a + b \in V$, sehingga $T(a + b) = x + y \in R(T)$
Selanjutnya

$\beta x = \beta\, T(a) = T(\beta a)$
Karena $\beta a \in V$, maka $T(\beta a) = \beta x \in R(T)$
Jadi R(T) sub ruang dari W. Terbukti.

Definisi

Jika $T : V \rightarrow W$ suatu pemetaan linier maka dimensi dari kernel T disebut nulitas (T) dan dimensi dari Range T disebut Rank(T).

Hubungan antara nulitas dan rank suatu pemetaan linier ditunjukkan dalam teorema berikut ini:

Teorema 7.4.1

Jika $T : V \rightarrow W$ suatu pemetaan linier dari ruang vektor V berdimensi n ke suatu ruang vektor W maka

Nulitas (T) + rank (T) = n

Contoh :

1. Misalkan $T : R^2 \rightarrow R^2$ adalah transformasi linier,
   $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ carilah dari antara berikut terletak ker(T)?

   a. $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 + (-1).10 \\ (-8).5 + 4.10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 10 \\ -40 + 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Terletak di ker (T)

b. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 + (-1).2 \\ (-8).3 + 4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 2 \\ -24 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix}$

Tidak terletak di ker (T)

2. Diberikan transformasi linier T : $R^4 \rightarrow R^3$ yang dinyatakan oleh :

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b \\ c - 2d \\ -a - b + c - 2d \end{bmatrix}$$

Tentukan basis kernel dan basis range dari T

Penyelesaian :

Basis kernel = basis ruang solusi dari matriks transformasi

Basis range = basis ruang kolom dari matriks transformasi

Matriks transformasi :

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b \\ c - 2d \\ -a - b + c - 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Melalui OBE akan diubah menjadi matriks bentuk eselon baris tereduksi yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} B_1 + B_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} -B_2 + B_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom pertama dan kolom ketiga dari matriks transformasi memiliki satu utama (leading one) sehingga inilah yang menjadi anggota dari basis range R(T).

Basis Range : $R(T) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ rank : 2

Kernel adalah anggota himpunan yang apabila dipetakan akan menghasilkan vektor 0 (nol) maka hasil transformasi ini diharapkan akan menghasilkan vektor nol.

Basis ruang solusi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil OBE didapatkan bahwa kolom kedua dan kolom keempat tidak memiliki satu utama (leading one). Kolom kedua bersesuaian dengan variabel b dan kolom keempat bersesuaian dengan variabel d.

Misalkan b = s d = t, s,t ∈ R
Dari baris pertama
a + b = 0 ⇔ a = -b = - s
c – 2d = 0 ⇔ c = 2d = 2t

sehingga solusinya $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$, s,t Î R

maka $Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nulitas : 2

Latihan Soal 7.4.

1. Misalkan T : $R^4 \Rightarrow R^4$ adalah transformasi linier yang dirumuskan oleh

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4\,, x_1 - 2x_3 + 7x_4\,, 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4, 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4)$$

   Manakah di antara berikut ini yang berada di dalam R(T)?
   a. (7,9,8,10) b. (9,11,8,10) c.(3,11,7,10)

2. Misalkan T : $R^4 \rightarrow R^3$ adalah transformasi linier yang dirumuskan dalam nomor 1. Adakah di antara berikut ini yang berada dalam Ker (T)? Mengapa?
   a.(0,-8,3,2) b.(9,-2,0,2) c.(3,0,1,2)

3. Misalkan $T : R^3 \rightarrow R^3$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 + 6x_3 \end{pmatrix}$$

Tentukan basis dan dimensi dari Kernel(T) dan Range(T)

4. Misalkan $T : R^4 \rightarrow R^3$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Tentukan basis dan dimensi dari Kernel(T) dan Range(T)

5. Misalkan $T : R^4 \rightarrow R^2$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Tentukan basis dan dimensi dari Kernel(T) dan Range(T)

7.5. TRANSFORMASI LINIER INVERS

TRANSFORMASI LINIER SATU KE SATU

Definisi

Suatu transformasi linier $T : V \rightarrow W$ dikatakan satu – satu (one to one) jika T memetakan vektor-vektor berbeda pada V ke vektor – vektor berbeda pada W

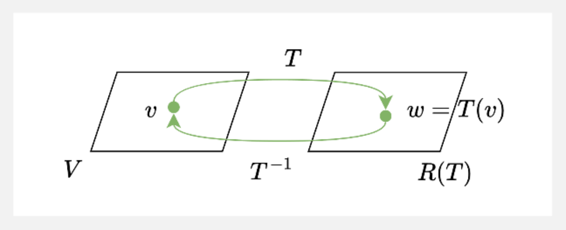
Teorema 7.5.1

Jika $T : V \rightarrow W$ adalah suatu transformasi linier, maka pernyataan – pernyataan berikut ekuivalen :

a) T adalah satu – satu
b) Kernel dari T hanya terdiri dari vektor nol, yaitu Ker(T) = {0}
c) Nulitas (T) = 0

TRANSFORMASI LINIER INVERS

Jika T : V → W adalah suatu transformasi linier satu –satu, maka terdapat suatu invers dari T yang memetakan setiap vektor pada W kembali ke vektor – vektor pada V, yang dinyatakan dengan T^{-1}. Lihat gambar 7.5.1



Gambar 7.5.1 Transformasi Linier Invers

Teorema 7.5.2

Jika T_1 : U → V dan T_2 : V → W adalah suatu transformasi linier satu – satu maka

a) $T_2 \circ T_1$ adalah satu – satu
b) $(T_2 \circ T_1)^{-1} = {T_1}^{-1} \circ {T_2}^{-1}$

Contoh :

Misalkan T : $R^3 \rightarrow R^3$ adalah operator linier yang didefinisikan oleh rumus

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, -2x_1 - 4x_2 + 3x_3, 5x_1 + 4x_2 - 2x_3)$$

Tentukan apakah T adalah satu ke satu; jika ya, tentukan $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$

Penyelesaian :

Menentukan satu ke satu dengan kernel, dimana jika T satu ke satu maka ker (T) = 0

Matriks transformasinya

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$~~dengan OBE menjadi matriks eseleon baris tereduksi

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Rank(T) = 3 maka nulitas (T) = 0 sehingga terbukti jika T satu ke satu dan mempunyai invers.

Dengan cara yang sama untuk mencari invers matriks, maka didapatkan

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ sehingga

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -11x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ -12x_1 + 7x_2 + 10x_3 \end{pmatrix}$$

Latihan Soal 7.5.

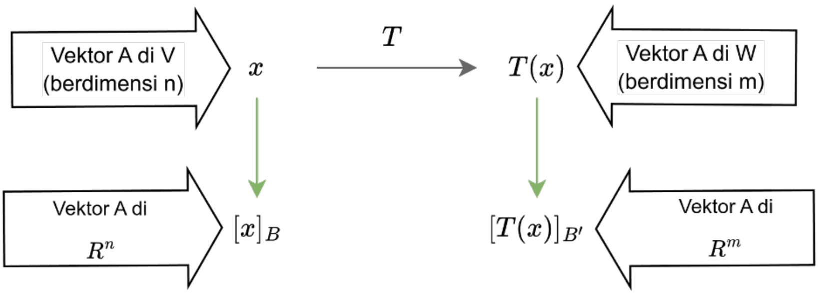
1. Pada setiap poin di bawah ini, tentukan Ker(T) dan tentukan apakah transformasi linier T yang diberikan adalah satu ke satu?
   a. $T : R^2 \rightarrow R^2$, dimana T (x,y) = (2x+2y, 2x – 2y)
   b. $T : R^2 \rightarrow R^3$, dimana T (x,y) = (2x,2y, 2x + 2y)

2. Misalkan $T : R^2 \rightarrow R^2$ adalah perkalian dengan A. Tentukan apakah T memiliki sebuah invers?, Jika ya, tentukan.
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Misalkan $T : R^3 \rightarrow R^3$ adalah perkalian dengan A. Tentukan apakah T memiliki sebuah invers?, Jika ya, tentukan.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
4. Misalkan $T : R^3 \rightarrow R^3$ adalah perkalian dengan A. Tentukan apakah T memiliki sebuah invers?, Jika ya, tentukan.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Pada setiap bagian di bawah ini, tentukan apakah perkalian dengan A adalah transformasi linier satu ke satu?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

7.6. MATRIKS TRANSFORMASI LINIER

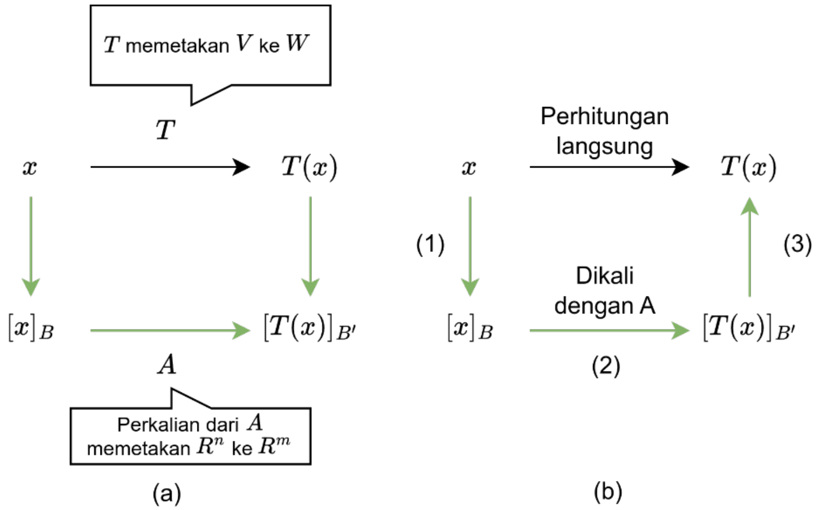


Gambar 7.6.1 Matriks transformasi linier

Andaikan bahwa V adalah vektor ruang berdimensi-n dan W adalah vektor ruang berdimensi-m. Jika kita memilih basis B dan B' untuk V dan W, maka untuk setiap x di V, vektor koordinat $[x]_B$ akan ada sebuah vektor di R^n, dan vektor koordinat $[T(x)]_{B'}$ akan ada sebuah vektor di R^m. Lihat gambar 7.6.1

Andaikan T : V → W adalah transformasi linier, maka akan diperoleh peta dari R^n ke R^m yang dapat ditunjukkan bahwa itu transformasi linier. Jika A adalah matriks standar untuk transformasi ini maka

$$A[x]_B=[T(x)]_{B'}$$



Gambar 7.6.2 Alur tranformasi linier

Matriks A adalah matriks untuk T yang berhubungan dengan basis B dan B'.Tujuan kita adalah mencari matriks A berukuran m × n sehingga perkalian dengan A memetakan vektor $[x]_B$ ke dalam vektor $[T(x)]_B$ untuk setiap x dalam V (Gambar 7.6.2a). Jika kita dapat melakukannya, maka seperti diilustrasikan pada Gambar 7.6.2.b, kita akan dapat melaksanakan transformasi linier T dengan menggunakan perkalian matriks dan prosedur tidak langsung berikut:

[1] Hitung matriks koordinat $[x]_B$

[2] Kalikan $[x]_B$ pada sisi kiri dengan $[T]_{B',B}$ sehingga menghasilkan $[T(x)]_{B'}$

[3] Bentuk Kembali T(x) dari matriks koordinatnya $[T(x)]_{B'}$

Andaikan B = $[u_1,u_2,\ldots,u_n]$ adalah basis ruang vektor V dan B' = $[v_1, v_2,\ldots,v_m]$ adalah basis ruang vektor W, maka matriks standarnya berdimensi mxn :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Persamaan – persamaannya :

$A[u_1]_B = [T(u_1)]_{B'}$, $A[u_2]_B = [T(u_2)]_{B'}$, … ,$A[u_n]_B = [T(u_n)]_{B'}$. ……..(2)

$$[u_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [u_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [u_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A[u_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$A[u_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

$$A[u_n]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan mensubtitusikan hasil tersebut ke dalam (2) menghasilkan

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [T(u_1)]_{B'} \qquad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(u_2)]_{B'} \qquad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = [T(u_n)]_{B'}$$

Yang menunjukkan bahwa kolom – kolom matriks A secara berturut-turut adalah matriks-matriks koordinat dari

$T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$

Berkenaan dengan basis B’. dengan demikian, matriks untuk T berkenaan dengan basis B dan B’ adalah

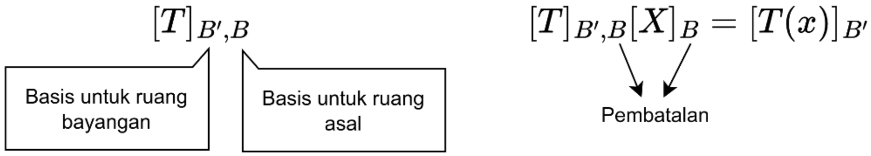
$$A = \big[[T(u_1)]_{B'} \,|[T(u_2)]_{B'}| \ldots | \, [T(u_n)]_{B'}\big]$$

Matriks ini secara umum dinotasikan dengan symbol

$$[T]_{B',B}$$

Sehingga rumus di atas dapat juga dituliskan sebagai

$$[T]_{B',B} = \big[[T(u_1)]_{B'} \,|[T(u_2)]_{B'}| \ldots | \, [T(u_n)]_{B'}\big]$$



$[T]_{B',B}[x]_B = [T(x)]_{B'}$

Langkah-langkah menggunakan Matriks Transformasi Linier Umum

Anggap terdapat suatu Transformasi Linier T : V → W, V adalah ruang vektor dengan dimensi n memiliki basis B = $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ dan W adalah ruang vektor dengan dimensi m memiliki basis B'=$\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$. Maka matriks transformasi linier umum dari B' ke B, A = $[T]_{B',B}$ dapat dicari dengan Langkah-langkah berikut :

Langkah -1 Tentukan transformasi setiap basis ruang asal (domain), $T(u_1), T(u_2),\ldots, T(u_n)$

Langkah-2 Tentukan koordinat transformasi basis ruang asal terhadap basis ruang hasil $\left[[T(u_1)]_{B'} | [T(u_2)]_{B'} | \ldots | [T(u_n)]_{B'}\right.$

Langkah-3 Matriks $A = [T]_{B',B} = \left[[T(u_1)]_{B'} | [T(u_2)]_{B'} | \ldots | [T(u_n)]_{B'}\right]$

Koordinat asli hasil transformasi linier dengan menggunakan Matriks Transformasi dapat dicari dengan Kombinasi Linier Koordinat Relatif dengan Basis B'.

Contoh :

Misalkan T : $R^2 \rightarrow R^3$ adalah transformasi linier yang didefinisikan oleh

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan matriks untuk transformasi T berkenaan dengan basis B =$\{u_1,u_2\}$ dan B'=$\{v_1,v_2,v_3\}$ dengan

$$u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b. Tentukan T$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

a. Matriks T dengan basis B

T(u_1)=$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ T(u_2)=$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Matriks T berbasis B relative terhadap basis B' ditemukan dengan kombinasi linier :

T(u_1) = $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$ dan T(u_2) = $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Untuk T(u_1)

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -5 \end{array}\right]$ ubah menjadi matriks eselon baris tereduksi dengan OBE

Didapatkan k_1= 1, k_2=0 dan k_3= -2 sehingga T(u_1) = v_1 - 2v_3

Untuk T(u_2)

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right]$ ubah menjadi matriks eselon baris tereduksi dengan OBE didapatkan k_1= 3, k_2=1 dan k_3= -1 sehingga T(u_2) = 3v_1 + v_2 - v_3

$[T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ $[T(u_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$A = [T]B'B = [T(u_1)]_{B'}[T(u_2)]_{B'}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

b.Untuk $T\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} \sim\sim\sim \left[\begin{array}{cc|c}3 & 5 & 2\\1 & 2 & 4\end{array}\right] \sim\sim\sim$ dengan OBE didapatkan

K_1 = -16 dan k_2=10

$[T(x)]_{B'} = A[x]_B$

$$= \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-16\\10\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}14\\10\\22\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = 14\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix} + 22\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\42\\50\end{bmatrix}$$

Teorema 7.6.1

Jika T : $R^n \rightarrow R^m$ adalah suatu transformasi linier dan jika B dan B' adalah basis-basis standar masing – masing untuk R^n dan R^m maka $[T]_{B',B} = [T]$

Teorema 7.6.2

Jika T_1: U → V dan T_2 : V →W adalah transformasi – transformasi linier dan jika B,B", dan B' masing-masing adalah basis untuk U,V, dan W maka

$$[T_2 \ o \ T_1]_{B\prime B} = T_{2_{B\prime B"}} T_{1_{B"B}}$$

Teorema 7.6.3

Jika T : V → V adalah suatu operator linier dan jika B adalah suatu basis untuk V maka pernyataan – pernyataan berikut ekuivalen

a. Matriks T adalah satu – satu
b. Matriks standar $[T]_B$ dapat dibalik

Lebih jauh, jika syarat ini terpenuhi, maka

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$$

Latihan Soal 7.6.

1. Misalkan T : $R^2 \to R^2$ merupakan suatu operator linier yang didefinisikan oleh

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Dan B = {u_1, u_2} adalah sebuah basis sedemikian rupa sehingga $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Tentukan $[T]_{B'}$

2. Diketahui T : $R^3 \to R^3$ dengan $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{bmatrix}$ dengan basis R^3, B = B'=$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ Tentukan matriks A= $[T]B'B$ dan $T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Misalkan T : $R^3 \to R^3$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks $[T]_{B'B}$ yang berkenaan dengan basis standar B = (**u₁, u₂, u₃**) dimana $\mathbf{u_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u_3}= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan basis B' = ($\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$) dimana $\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_3}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

7.7. SIMILARITAS

Teorema 7.7.1

Jika B dan B' adalah basis basis untuk ruang vektor berdimensi hingga V, dan jika I: V→V adalah operator identitas, maka matriks transformasi $[I]_{B,B'}$ adalah matriks transisi dari B' ke B

Teorema 7.7.2

Anggap T : V→V adalah suatu operator linier pada ruang vektor berdimensi hingga V, dan anggap B dan B' adalah basis-basis untuk V, maka

$$[T]_{B'} = P^{-1} [T]_B P$$

Dimana P adalah Matriks Transisi dari B' ke B

Jika A dan B adalah matriks-matriks bujur sangkar, maka dikatakan B serupa dengan A jika ada suatu matriks yang dapat dibalik P sedemikian sehingga $B = P^{-1} AP$

$B = P^{-1} AP$ dapat ditulis sebagai $A = PBP^{-1}$

Dengan menganggap $P^{-1} = Q$ maka diperoleh $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$ atau $A = Q^{-1}BQ$.

Sehingga dikatakan bahwa A dan B serupa.

INVARIAN-INVARIAN KESERUPAAN

Suatu sifat matriks bujur sangkar disebut invariant keserupaan (similarity invariant) apabila sifat tersebut dimiliki bersama oleh dua matriks serupa sembarang (lihat tabel 7.7.1)

Tabel 7.7.1

Sifat	Deskripsi
Determinan	A dan $P^{-1}AP$ memiliki determinan yang sama
Keterbalikan	A dapat dibalik jika dan hanya jika $P^{-1}AP$ dapat dibalik
Rank	A dan $P^{-1}AP$ memiliki rank yang sama
Nulitas	A dan $P^{-1}AP$ memiliki nulitas yang sama
Trace	A dan $P^{-1}AP$ memiliki trace yang sama
Polinomial karakteristik	A dan $P^{-1}AP$ memiliki polynomial karakteristik yang sama
Nilai Eigen	A dan $P^{-1}AP$ memiliki nilai eigen yang sama
Dimensi ruang eigen	Jika λ adalah sebuah nilai eigen dari A dan $P^{-1}AP$ maka ruang eigen dari A yang terkait dengan λ dan ruang eigen dari $P^{-1}AP$ terkait dengan λ dalam dimensi yang sama

Contoh

1. Diketahui matriks A = {(-3,2), (4,-2)} dan A' = {(-1,2,(2,-2)} menjadi basis di R^2 dan diketahui B = $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$. Temukan matriks yang similar dengan A.

   Penyelesaian :

   [A   A'] menjadi [I_2 P]

   $$P = A^{-1}\,A' = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

   $$= -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

   $$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

   $$B' = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Diketahui operasi linier T : $R^2 - R^2$ yang didefinisikan oleh

   $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$ dan basis standar B = $[e_1, e_2]$ untuk R^2 dimana

   $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Tentukan matriks untuk T yang berkenaan dengan basis standar B = $[e_1, e_2]$ untuk R^2 kemudian gunakan teorema $[T]_{B'} = P^{-1}\,[T]_B\,P$

   untuk menentukan matriks T yang berkenaan dengan basis B' $=[u'_1, u'_2]$, dimana $u'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,$u'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   Penyelesaian :

   $[T]_B = [T(e_1)|T(e_2)]$

   $T(e_1) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $T(e_2) = T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Sehingga $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$P = [I]_{B,B'} = [[u_1']_B \mid [u_2']_B]$

$u_1' = e_1 + e_2$ dan $u_2' = e_1 + 2e_2$ sehingga

$[u_1']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $[u_2']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Dengan demikian, matriks transisi dari B' ke B adalah

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Sehingga matriks untuk T relative terhadap basis B' adalah

$[T]_{B'} = P^{-1}\,[T]_B\,P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Latihan Soal 7.7.

Tentukan matriks untuk T yang berkenaan dengan B kemudian gunakan teorema $[T]_{B'} = P^{-1}\,[T]_B\,P$ untuk menentukan matriks T yang berkenaan dengan B'.

1. $T : R^2 \to R^2$ didefinisikan oleh

   $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$

   $B = \{u_1, u_2\}$ dan $B' = \{v_1, v_2\}$ dimana

   $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

2. $T : R^2 \to R^2$ didefinisikan oleh

   $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$

   $B = \{u_1, u_2\}$ dan $B' = \{v_1, v_2\}$ dimana

   $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. Diketahui matriks A = {(1,2), (3,4)} dan A' = {(2,4),(4,5)} menjadi basis di R^2 dan diketahui B = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Temukan matriks yang similar dengan B.

Latihan Soal Bab VII

1. Tentukan matriks standar A untuk transformasi linier $T: R^3 \to R^3$ dimana
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2. Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan pencerminan (p, q, r) terhadap bidang-*xz*.

3. Tentukan matriks standar untuk transformasi T yang didefinisikan dengan rumus
   a) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$
   b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, -2x_1, x_3, -x_2, x_1 - x_3)$

4. Diketetahui bahwa
   $T_A: R^3 \to R^3$ adalah proyeksi ortogonal ke bidang-*yz* dan
   $T_B: R^3 \to R^3$ adalah pencerminan terhadap bidang-*yz*.
   Tentukan $T_A \circ T_B$ dan $T_B \circ T_A$.

5. Temukan matriks standar untuk komposisi yang dinyatakan dalam R^2 berikut ini:

   Refleksi terhadap bidang-xy, dilanjutkan oleh proyeksi ortogonal ke bidang-xz.

6. Misal $T_1(x_1, x_2) = (x_1 - 5x_2, 2x_2 - 3x_1, -4x_1)$ dan $T_2(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1 + 8x_2)$. Tentukan matriks standar untuk $T_2 \circ T_1$ dan $T_1 \circ T_2$.

7. Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ untuk R^2, di mana
$$\boldsymbol{v}_1 = (-1, 1), \boldsymbol{v}_2 = (2, -3).$$
Misalkan $T: R^2 \to R^3$ adalah transformasi linier di mana
$$T(\boldsymbol{v}_1) = (-2, 2, 0), T(\boldsymbol{v}_2) = (0, -4, -2).$$
Tentukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung $T(7, -4)$.

8. Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ untuk R^3, di mana
$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{v}_2 = (0, -4, 4), \boldsymbol{v}_3 = (1, 0, 1).$$
Misalkan $T: R^3 \to R^2$ adalah transformasi linier di mana
$$T(\boldsymbol{v}_1) = (1, -1), T(\boldsymbol{v}_2) = (-4, 4), T(\boldsymbol{v}_3) = (3, -1)$$
Tentukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2,\ x_3)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung $T(0, -1,\ 10)$.

9. Diketahui basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ untuk R^3, di mana
$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 1), \boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 0), \boldsymbol{v}_3 = (2, 0, 3).$$
Misalkan $T: R^3 \to R^3$ adalah transformasi linier di mana
$$T(\boldsymbol{v}_1) = (1, -2, 0), T(\boldsymbol{v}_2) = (0, 1, 4), T(\boldsymbol{v}_3) = (-1, 1{,}0).$$
Tentukan rumus untuk $T(x_1,\ x_2,\ x_3)$, lalu gunakan rumus tersebut untuk menghitung $T(5, 1, 2)$.

10. Pada setiap poin di bawah ini, tentukan apakah perkalian dengan A adalah transformasi linier satu ke satu?
    a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

11. Misalkan T : $R^2 \to R^2$ adalah perkalian dengan A. Tentukan apakah T memiliki sebuah invers?, Jika ya, tentukan.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Misalkan T : $R^3 \to R^3$ adalah perkalian dengan A. Tentukan apakah T memiliki sebuah invers?, Jika ya, tentukan.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Misalkan T : $R^3 \rightarrow R^3$ adalah perkalian dengan A. Tentukan apakah T memiliki sebuah invers?, Jika ya, tentukan.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Pada setiap bagian di bawah ini, tentukan apakah operator linier T : $M_{22} \rightarrow M_{22}$ yang diberikan adalah satu ke satu, jika ya tentukan inversnya :

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & d \\ c & b \end{bmatrix}$$

15. Misalkan T : $P_3 \rightarrow P_2$ adalah suatu transformasi linier yang ditentukan oleh $T(p(x)) = p'(x)$. Andaikan $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ dan $B' = \{1, x, x^2\}$ menjadi basis standar masing-masing untuk P_3 dan P_2. Temukan $[T]_{B',B}$ dan gunakan untuk menentukan T$\{3x^3 - x + 1\}$

16. Tentukan matriks untuk T yang berkenaan dengan B kemudian gunakan teorema $[T]_{B'} = P^{-1}\,[T]_B\,P$ untuk menentukan matriks T yang berkenaan dengan B'.

    T : $R^3 \rightarrow R^3$ didefinisikan oleh

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 \\ x_1 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan B' = $\{v_1, v_2, v_3\}$ dimana

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

17. Diketahui matriks A = {(1,2), (3,4)} dan A' = {(2,4),(4,5)} menjadi basis di R^2 dan diketahui B = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Temukan matriks yang similar dengan B.

18. Tunjukkan bahwa A similar dengan B jika diketahui A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,
B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, P = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bab VIII
NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

8.1. NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

DEFINISI

Misal A adalah matriks dengan ordo $n \times n$, maka vektor tidak nol $\boldsymbol{x}$ di R^n disebut dengan ***vektor eigen*** (***eigenvektor***) dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah perkalian skalar dari $\boldsymbol{x}$ yaitu

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

untuk sembarang skalar λ. Skalar λ disebut ***nilai eigen*** (***eigenvalue***) dari A dan $\boldsymbol{x}$ menjadi vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 1

Jika $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan nilai eigen yang sesuai.

Penyelesaian:

$A\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{x}$

Jadi $\boldsymbol{x}$ adalah vektor eigen dari A yang sesuai dengan nilai eigen $\lambda = 3$.

NILAI EIGEN

Persamaan $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ dapat ditulis menjadi:

$A\boldsymbol{x} = \lambda I \boldsymbol{x}$

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$$

Ingat $\boldsymbol{x}$ merupakan matriks bukan nol.

Teorema 8.1.1

Jika A adalah matriks dengan ordo $n \times n$, maka λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika λ memenuhi persamaan

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Ini disebut ***persamaan karakteristik*** dari A.

Contoh 2

Tentukan nilai eigen dari $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 - (-1) & 0 - 5 \\ 0 - 0 & \lambda - 0 & 0 - 2 \\ 0 - (-2) & 0 - 4 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & -5 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 2 & -4 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 7\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0$$

Nilai λ pertama diperoleh dari persamaan:

$$\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda = 4$$

Nilai λ yang lain diperoleh dengan menyelesaikan $(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0$, yaitu $\lambda = 1 + \sqrt{2}, \lambda = 1 - \sqrt{2}$.

Jadi, nilai eigen dari A adalah $\lambda = 4, \lambda = 1 + \sqrt{2}, \lambda = 1 - \sqrt{2}$.

Nilai Eigen pada Matriks Segitiga

Teorema

Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka nilai eigen dari A adalah entri pada diagonal utama A.

Contoh 3

Tentukan nilai eigen dari matriks segitiga atas berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Matriks A merupakan matriks segitiga atas maka nilai eigen dari A adalah entri pada diagonal utama A, yaitu $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = -1, \lambda = 7$.

VEKTOR EIGEN DAN BASIS RUANG EIGEN

Vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor bukan nol dalam ruang solusi $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$.

Kita sebut ruang solusi ini ***ruang eigen*** (***eigenspace***) dari A yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 4

Tentukan basis ruang eigen pada matriks:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -4 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0$$

Maka nilai eigen dari A adalah $\lambda = -4$ dan $\lambda = 3$. Jadi, terdapat dua ruang eigen dari A, masing-masing satu untuk setiap nilai eigen. Menurut definisi,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ jika dan hanya jika $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, yaitu,

$$\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -4 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalam kasus dimana $\lambda = -4$ persamaan tersebut menjadi

$$\begin{bmatrix} -4 + 1 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang solusi umumnya adalah

$$x_1 = -t, x_2 = t$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -4$ adalah

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan langkah yang sama, untuk $\lambda = 3$ diperoleh persamaan:

$$\begin{bmatrix} 3 + 1 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang solusi umumnya adalah

$$x_1 = \frac{3}{4}t, x_2 = t$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 5

Tentukan basis ruang eigen pada matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

Jadi, nilai eigen A yang berbeda adalah $\lambda = 0$ dan $\lambda = 1$, sehingga terdapat dua ruang eigen A saja.

Menurut definisi,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ jika dan hanya jika $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, yaitu,

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalam kasus dimana $\lambda = 0$ persamaan tersebut menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang solusi umumnya adalah

$$x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = t$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan langkah yang sama, untuk $\lambda = 1$ diperoleh persamaan:

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 2 \\ 1 & 1-1 & -1 \\ -1 & 0 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang solusi umumnya adalah

$$x_1 = 0, x_2 = t, x_3 = 0$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal 8.1

1. Jika $\boldsymbol{x}$ adalah vektor eigen dari A, tentukan nilai eigen yang sesuai.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai eigen pada Latihan nomor $2 - 4$.

2. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 5 & -2 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

4. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

5. Tentukan nilai eigen dan basis ruang eigen dari:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8.2. DIAGONALISASI

DEFINISI DIAGONALISASI MATRIKS

Matriks bujur sangkar A dikatakan dapat ***didiagonalkan*** jika mirip dengan beberapa matriks diagonal; yaitu, jika ada matriks P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ diagonal. Dalam hal ini matriks P dikatakan ***mendiagonalisasi*** A.

Teorema 8.2.1

Jika A adalah matriks $n \times n$, pernyataan berikut ekuivalen.

(a) A dapat didiagonalisasi.

(b) A memiliki n vektor eigen yang bebas linier.

Teorema 8.2.2

a) Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ adalah nilai eigen yang berbeda dari matriks A, dan jika $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ adalah vektor eigen yang bersesuaian, maka $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ adalah sebuah himpunan bebas linier.
b) Matriks $n \times n$ dengan n nilai eigen berbeda dapat didiagonalisasi.

PROSEDUR UNTUK MENDIAGONALKAN MATRIKS

Prosedur untuk mendiagonalkan matriks $n \times n$:

Langkah 1 Tentukan terlebih dahulu apakah matriks benar-benar dapat didiagonalisasi dengan mencari n vektor eigen yang bebas linier. Salah satu cara untuk melakukannya adalah mencari basis untuk setiap ruang eigen dan menghitung jumlah total vektor yang diperoleh. Jika ada total n vektor, maka matriks tersebut dapat didiagonalisasi, dan jika totalnya kurang dari n, maka tidak.

Langkah 2 Jika Anda sudah memastikan bahwa matriks tersebut dapat didiagonalkan, maka bentuklah matriks $P = [\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2 \ \ \dots \ \ \boldsymbol{p}_n]$ yang vektor kolomnya adalah n vektor basis yang Anda peroleh pada Langkah 1.

Langkah 3 $P^{-1}AP$ akan menjadi matriks diagonal yang entri diagonal berturut-turutnya adalah nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ yang sesuai dengan kolom berturut-turut dari P.

Contoh 1

Temukan matriks P yang mendiagonalkan A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda - 1) = 0$$

Jadi, nilai eigen A yang berbeda adalah $\lambda = 0$ dan $\lambda = 1$, sehingga terdapat dua ruang eigen A. Menurut definisi,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ jika dan hanya jika $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, yaitu,

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalam kasus dimana $\lambda = 0$ persamaan tersebut menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang solusi umumnya adalah

$$x_1 = t, x_2 = s, x_3 = t$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan langkah yang sama, untuk $\lambda = 1$ diperoleh persamaan:

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang solusi umumnya adalah

$$x_1 = 2t, x_2 = -t, x_3 = t$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Total ada tiga vektor basis, jadi matriks P yang mendiagonalisasi A adalah

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kita dapat memeriksa dengan memverifikasi bahwa

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entri diagonal utama ke-i dari $P^{-1}AP$ adalah nilai eigen untuk vektor kolom ke-i dari P.

Contoh 2

Tunjukkan bahwa matriks berikut tidak dapat didiagonalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 3 & -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Nilai eigen A yang berbeda adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$.

Menurut definisi,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ jika dan hanya jika $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, yaitu,

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 3 & -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalam kasus dimana $\lambda = 1$ persamaan tersebut menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang solusi umumnya adalah

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{4}t, x_3 = t$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan langkah yang sama, untuk $\lambda = 2$ diperoleh persamaan:

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \\ 3 & -4 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang solusi umumnya adalah

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = t$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena A adalah matriks berukuran 3×3 dan hanya terdapat dua vektor basis, maka A tidak dapat didiagonalisasi.

Latihan Soal 8.2

Pada Latihan nomor $1-3$, temukan matriks P yang mendiagonalkan A (jika ada).

1. $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Pada Latihan nomor $4-5$, temukan matriks standar A untuk operator linier yang diberikan, dan tentukan apakah matriks tersebut dapat didiagonalkan atau tidak. Jika dapat didiagonalkan, tentukan matriks P yang mendiagonalkan A.

4. $T_1(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1, 2x_2, x_1 + x_2)$

5. $T_1(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_3, x_2)$

Latihan Soal Bab VIII

1. Jika $\boldsymbol{x}$ adalah vektor eigen dari A, tentukan nilai eigen yang sesuai.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai eigen dan basis ruang eigen pada Latihan nomor $2-5$.

2. $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

4. $P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

5. $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. Tunjukkan bahwa $\lambda = 2$ adalah nilai eigen dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ kemudian tentukan ruang eigen yang bersesuaian.

Pada Latihan nomor $7-10$, temukan matriks P yang mendiagonalkan A (jika ada).

7. $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11. Temukan matriks standar A untuk operator linier yang diberikan, dan tentukan apakah matriks tersebut dapat didiagonalkan atau tidak. Jika dapat didiagonalkan, tentukan matriks P yang mendiagonalkan A.

$$T_1(x_1, x_2) = (-2x_2, -2x_1)$$

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., & Kaul, A. (2020). *Elementary Linear Algebra (12th ed.)*. Wiley Global Education US.

Barreira, L., & Valls, C. (2016). *Exercises In Linear Algebra*. World Scientific Publishing.

Baker, R., & Kuttler, K. (2014). *Linear Algebra With Applications*. World Scientific Publishing.

Goodaire, E. (2013). *Linear Algebra: Pure & Applied*. World Scientific Publishing.

Lax, P. D. (2013). *Linear Algebra and Its Applications (2nd ed.)*. Wiley Professional, Reference & Trade (Wiley K&L).

Moh, T. (2020). *Linear Algebra And Its Applications*. World Scientific Publishing.

O'Leary, M. L. (2021). *Linear Algebra*. Wiley Global Research (STMS).

Passman, D. S. (2022). *Lectures On Linear Algebra*. World Scientific Publishing.

ALJABAR LINIER

Buku Aljabar Linier disusun atas kerjasama para dosen pengajar mata kuliah Aljabar Linier dan asisten dosen Fakultas Teknologi Industri Universitas Atma Jaya Yogyakarta. Buku ini menyajikan materi yang berkaitan dengan matriks dan vektor yang dapat dipelajari dengan mudah. Buku Aljabar Linier ini dapat digunakan oleh Dosen, Mahasiswa, dan Praktisi untuk melakukan kajian atau penelitiannya, serta upaya meningkatkan kompetensinya. Selain itu buku ini dapat digunakan sebagai panduan belajar di jenjang perguruan tinggi seperti pada program sarjana Informatika, Teknik Industri, Ilmu Komputer, Teknik Sipil, Teknik Elektro, Matematika, Ilmu statistika, dll. Pada buku ini juga memuat beberapa contoh soal yang mudah dipahami bagi pembaca yang ingin mempelajari konsep matriks dan vektor secara mandiri. Pada setiap akhir sub bab juga disertakan beragam latihan soal yang dapat digunakan untuk mengasah pemahaman setelah mempelajari materi.

ISBN: 978-623-10-2784-9(PDF)
9 786231 027849

Universitas Atma Jaya Yogyakarta
Jl. Babarsari No. 5-6 Yogyakarta 55281
Telp. +62 274 487711
E-mail: lib.publisher@uajy.ac.id