BAB III

LANDASAN TEORI

3.1. Metode Kekakuan untuk Analisis Portal Bidang

3.1.1. Derajat kebebasan

a. Derajat kebebasan batang lurus

Untuk suatu batang lurus pada portal bidang terdapat enam derajat kebebasan seperti terlihat dalam gambar 3.1

Gambar 3.1. Derajat kebebasan batang lurus untuk portal bidang

Tanda panah pada gambar 3.1 menyatakan translasi dan rotasi. Translasi titik kumpul i diberi nomor 1 untuk arah horisontal, 2 untuk arah vertikal, dan rotasi diberi nomor 3, sedangkan translasi titik kumpul j diberi nomor 4 untuk arah horisontal, 5 untuk arah vertikal dan 6 untuk rotasi.

b. Derajat kebebasan batang lengkung

Untuk suatu batang lengkung pada portal bidang terdapat enam derajat kebebasan seperti terlihat dalam gambar 3.2

Gambar 3.2. Derajat kebebasan batang lengkung untuk portal bidang

Tanda panah pada gambar 3.2 menyatakan translasi dan rotasi. Translasi titik kumpul i diberi nomor 1 untuk arah horisontal, 2 untuk arah vertikal, dan rotasi diberi nomor 3. sedangkan translasi titik kumpul j diberi nomor 4 untuk arah horisontal, 5 untuk arah vertikal dan 6 untuk rotasi.

3.1.2. Matriks fleksibilitas batang lengkung

Matriks fleksibilitas adalah suatu matriks yang menyatakan hubungan lendutan-gaya. Untuk mencari lendutan yang terjadi akibat bekerjanya gaya-gaya dapat digunakan prinsip kerja virtuil (Supartono,1984, hal 147).

Ada dua bentuk umum untuk menyatakan kerja virtuil eksternal dan kerja virtuil komplimenter eksternal, yaitu :

$$\delta W_E = Q.\delta D \qquad (3\text{-}1)$$

$$\delta W_E = \delta Q.D \qquad (3\text{-}2)$$

Persamaan (3-1) menyatakan kerja virtuil eksternal sebagai akibat diberikannya suatu lendutan virtuil δD pada gaya riil Q, sedangkan persamaan (3-2) menyatakan kerja virtuil komplementer sebagai akibat diberikannya suatu lendutan riil D pada gaya virtuil δQ (Supartono,1984, hal 147).

Dalam hal mencari hubungan lendutan dan gaya, dipakai prinsip kerja virtuil komplementer sebagai dasar perhitungan (Supartono,1984, hal 147).

Dari prinsip kerja dan energi, maka kerja virtuil eksternal harus sama dengan kerja virtuil internal yaitu :

$$\delta W_E = \delta W_I \qquad (3\text{-}3)$$

Dimana δW_E menyatakan kerja virtuil eksternal, δW_I menyatakan kerja virtuil internal (Supartono,1984, hal 147).

Melihat persamaan (3-2) , maka persamaan (3-3) dapat juga dinyatakan sebagai :

$$\delta Q.D = \delta W_I \qquad (3\text{-}4)$$

Gaya internal meliputi gaya normal, gaya geser, gaya momen lentur dan gaya momen torsi. Masing-masing gaya internal bisa melakukan kerja, yang berturut-turut akan dinyatakan oleh persamaan (3-5) :

$$\delta W_I(normal) = \int_0^L \frac{n_x.N_x}{E.A} dx \qquad (3\text{-}5.a)$$

$$\delta W_I(geser) = \int_0^L \frac{v_x.V_x}{G.A_v} dx \qquad (3\text{-}5.b)$$

$$\delta W_I(lentur) = \int_0^L \frac{m_x.M_x}{E.I} dx \qquad (3\text{-}5.c)$$

$$\delta W_I(torsi) = \int_0^L \frac{t_x.T_x}{G.J} dx \qquad (3\text{-}5.d)$$

Dengan pengertian :

n_x = gaya normal yang timbul dinyatakan sebagai fungsi x sebagai akibat dikerjakannya gaya virtuil δQ.

N_x = gaya normal yang timbul dinyatakan sebagai fungsi x sebagai akibat dikerjakannya gaya kuar Q.

v_x = gaya geser virtuil

V_x = gaya geser akibat gaya luar

m_x = momen lentur virtuil

M_x = momen lentur akibat gaya luar

t_x = momen torsi virtuil

T_x = momen torsi akibat gaya luar

L = panjang elemen

A = luas penampang elemen

A_v = luas efektif terhadap geser

I = momen inersia sumbu dari penampang

J = momen inersia polar dari penampang

E = modulus elastisitas dari bahan

G = modulus geser dari bahan

Jika ditulis secara lengkap dan dengan mengambil nilai δQ = 1 maka :

$$D = \int_0^L \frac{n_x.N_x}{E.A} dx + \int_0^L \frac{v_x.V_x}{G.A_v} dx + \int_0^L \frac{m_x^{zz}.M_x^{zz}}{E.I_{zz}} dx + \int_0^L \frac{t_x.T_x}{G.J} dx \qquad (3\text{-}6)$$

Persamaan ini akan menjadi dasar menghitung lendutan untuk menurunkan matriks fleksibilitas (Supartono,1984, hal 149).

3.1.3.Matriks kekakuan dalam sumbu lokal

a. Matriks kekakuan batang lurus

Matriks kekakuan batang lurus dalam sumbu lokal [k] pada gambar 3.1. dapat dirumuskan sebagai berikut (Kardestuncer, 1974):

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{ii}{}^{j} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj}{}^{i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3\text{-}7)$$

b. Matriks kekakuan batang lengkung

Matriks kekakuan batang lengkung dalam tata sumbu lokal secara keseluruhan dapat di tulis (Kardestuncer,1974):

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{ii}{}^{j} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj}{}^{i} \end{bmatrix} \quad (3\text{-}8)$$

dengan matriks $k_{ii}{}^{j}$ didapat dari invers matriks fleksibilitas di ujung i :

$$\left[k_{ii}{}^{j}\right]=\left[d_{ii}{}^{j}\right]^{-1} \quad (3\text{-}9)$$

Untuk mencari matriks k_{ij}, k_{ji} dan k_{jj} diperlukan persamaan kesetimbangan gaya yang ditunjukan sebagai berikut (Kardestuncer,1974):

$$\begin{aligned} &p_{1,ij}\cos\phi - p_{2,ij}\sin\phi + p_{1,ji} = 0 \\ &p_{1,ij}\sin\phi - p_{2,ij}\cos\phi + p_{2,ji} = 0 \\ &p_{3,ij} + p_{3,ji} + r\sin\phi p_{2,ij} + (r - r\cos\phi)p_{1,ij} = 0 \end{aligned} \quad (3\text{-}10)$$

dalam bentuk matriks :

dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}_{ji} = -\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ r - r\cos\phi & r\sin\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}_{ij} \tag{3-11}$$

atau dalam bentuk yang pendek :

$$p_{ji} = -h_{ij}\, p_{ij} \tag{3-12}$$

Berdasarkan persamaan dasar matriks kekakuan struktur dalam sumbu lokal akan didapat (Kardestuncer,1974, hal 341):

$$k_{ji} = k_{ij}^{*} = -h_{ij} k_{ii}^{\,j} \tag{3-13}$$

$$k_{jj}^{\,i} = h_{ij} k_{ii}^{\,j} h_{ij}^{*} \tag{3-14}$$

3.1.4. Matriks transformasi

a. Matriks transformasi batang lurus

Matriks transformasi untuk batang lurus sebagai berikut (Kardestuncer,1974, hal 188):

$$[R_{ij}] = \begin{bmatrix} R_{ij} & 0 \\ 0 & R_{ij} \end{bmatrix} \tag{3-15}$$

dimana :

$$[R_{ij}] = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_j - Y_i}{L} & -\dfrac{X_j - X_i}{L} & 0 \\ \dfrac{X_j - X_i}{L} & \dfrac{Y_j - Y_i}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-16}$$

b. Matriks transformasi batang lengkung

Matriks transformasi untuk batang lengkung secara keseluruhan dapat ditulis :

$$[R_{ij}] = \begin{bmatrix} R_{ij}{}^{i} & 0 \\ 0 & R_{ij}{}^{j} \end{bmatrix} \tag{3-17}$$

dimana :

$$[R_{ij}]^{i} = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_o - Y_i}{r} & -\dfrac{X_o - X_i}{r} & 0 \\ \dfrac{X_o - X_i}{r} & \dfrac{Y_o - Y_i}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-18}$$

$$[R_{ij}]^{j} = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_o - Y_j}{r} & -\dfrac{X_o - X_j}{r} & 0 \\ \dfrac{X_o - X_j}{r} & \dfrac{Y_o - Y_j}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-19}$$

Dengan X_o, Y_o adalah absica dan ordinat titik pusat lengkung batang, X_i, Y_i absica dan ordinat titik kumpul i, X_j, Y_j absica dan ordinat titik kumpul j (Kardestuncer,1974, hal 338).

3.1.5. Matriks kekakuan batang sumbu global

Matriks kekakuan batang dalam sistem koordinat global dihitung dengan persamaan (Kardestuncer,1974, hal 190) :

$$[K] = [R_{ij}]^{T}[k][R_{ij}] \tag{3-20}$$

Dengan [k] adalah matriks kekakuan batang dalam sistem koordinat lokal, [R_{ij}] adalah matriks transformasi batang.

3.2. Vektor Beban

Vektor beban adalah jumlah total beban yang bekerja pada titik-titik struktur (Cook,1990, hal 35) :

$$\{R\} = \{P\} + \sum \{r\} \tag{3-21}$$

dengan $\{P\}$ adalah vektor gaya yang bekerja pada titik-titik struktur dan {r} adalah beban/gaya yang dikerjakan batang oleh titik kumpulnya.

3.3. Persamaan Aksi untuk Portal Bidang

Persamaan aksi untuk analisis portal bidang merupakan persamaan linier yang terdiri dari beban/ aksi gabungan [R}, vektor perpindahan $\{D\}$, dan matriks kekakuan struktur [K]. Dengan hubungan seperti dibawah ini (Cook,1990, hal 27) :

$$\{D\} = [K]^{-1}\{R\} \tag{3-22}$$

3.4. Gaya Batang dan Reaksi Tumpuan

Setelah mendapatkan nilai perpindahan titik kumpul bebas $\{D_F\}$, reaksi tumpuan $\{A_R\}$ dapat diperoleh sebagai berikut (Weaver, 1986, hal 171) :

$$\{A_R\} = -\{A_{RC}\} + [S_{RF}]\{D_F\} \tag{3-23}$$

Dimana $\{A_{RC}\}$ adalah beban titik kumpul gabungan yang selaras dengan perpindahan titik kumpul yang dikekang, [S_{RF}] adalah Reaksi pada titik kumpul yang dikekang akibat satu satuan perpindahan titik kumpul bebas, dan $\{D_F\}$ adalah perpindahan titik kumpul bebas.

Sedangkan gaya batang $\{A_M\}$ dapat dihitung sebagai berikut (Weaver, 1986) :

$$\{A_{mi}\} = \{A_{MLi}\} + [SMS_i][R_{Ti}]\{D_{ji}\} \tag{3-24}$$

Dimana $\{A_{Mli}\}$ adalah gaya ujung batang akibat beban pada batang, $[SMS_i]$ matriks kekakuan batang diujung k pada batang i, $[R_{Ti}]$ adalah matriks transformasi untuk batang i, $\{D_{ji}\}$ adalah perpindahan titik kumpul di ujung-ujung batang i.