

## BAB II

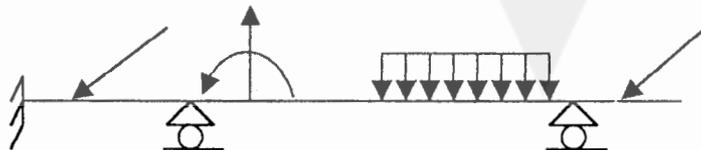
### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1. Tinjauan Struktur Rangka

Struktur rangka dapat dibagi atas enam kategori (Weaver dan Gare, 1986, hal.1) : balok, rangka batang bidang, rangka batang ruang, portal bidang, balok silang, dan portal ruang. Setiap struktur rangka terdiri dari batang-batang yang panjangnya jauh lebih besar dibandingkan ukuran penampang lintangnya. Titik kumpul struktur rangka adalah titik pertemuan batang-batang, termasuk tumpuan dan ujung bebas suatu batang.

##### 2.1.1. Balok

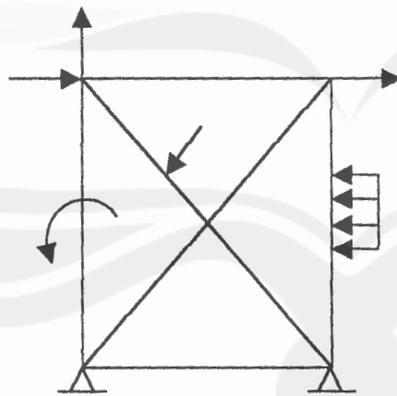
Balok merupakan suatu batang lurus dengan satu atau lebih tumpuan terpusat (Weaver dan Gare, 1986, hal.2). Gaya luar pada balok dianggap bekerja dalam bidang yang melalui sumbu simetri penampang lintangnya (sumbu simetri juga merupakan sumbu utama penampang lintang). Selain itu, vektor momen seluruh kopel luar yang bekerja pada balok adalah tegak lurus bidang ini, serta balok melendut dalam bidang yang sama (bidang lentur). Penampang melintang balok dapat mengalami resultan tegangan dalam yang secara umum bisa berupa gaya aksial, gaya geser, dan momen lentur. Bentuk balok secara umum dapat dilihat pada gambar 2.1.



Gambar 2.1. Balok

### 2.1.2. Rangka batang bidang

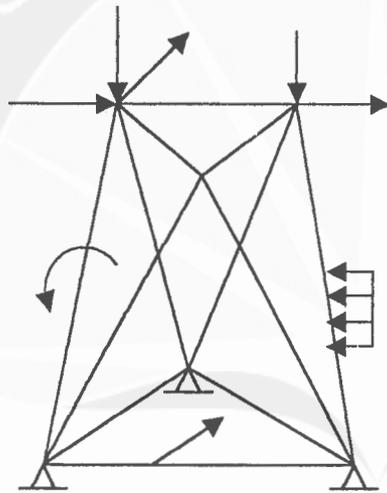
Rangka batang bidang merupakan himpunan yang sebidang dan bersambungan sendi di titik kumpulnya (Weaver dan Gare, 1986, hal.2). Semua gaya yang diberikan dianggap bekerja dalam bidang struktur, dan vektor momen seluruh kopel luar tegak lurus bidang tersebut seperti pada kasus balok. Beban bisa terdiri dari gaya terpusat yang diberikan di titik kumpul dan beban yang bekerja pada batang. Untuk tujuan analisa, beban terakhir boleh diganti dengan beban ekivalen secara statis dan bekerja di titik kumpul. Jika analisa rangka batang hanya memikul beban titik kumpul, maka batang hanya mengalami gaya aksial tarik atau tekan. Sedang bila beban bekerja langsung pada suatu batang, maka batang tersebut akan mengalami momen lentur dan gaya geser. Bentuk rangka batang bidang secara umum dapat dilihat pada gambar 2.2.



Gambar 2.2. Rangka batang bidang

### 2.1.3. Rangka batang ruang

Rangka batang ruang serupa dengan rangka batang bidang, kecuali batang-batangnya berarah sembarang dalam ruang (Weaver dan Gare, 1986, hal.2). Gaya yang bekerja pada rangka batang ruang juga boleh berarah sembarang, tetapi vektor momen suatu kopel yang bekerja pada suatu batang harus tegak lurus terhadap sumbu batang tersebut syarat ini disebabkan batang pada rangka batang tidak mampu menahan momen puntir. Bentuk rangka batang ruang secara umum dapat dilihat pada gambar 2.3.

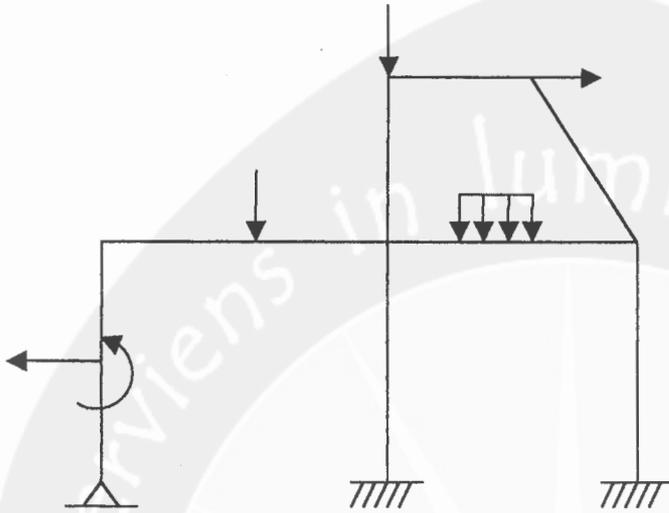


Gambar 2.3. Rangka batang ruang

### 2.1.4. Portal bidang

Portal bidang dibentuk oleh batang-batang dengan sumbu simetri terletak pada satu bidang. Titik kumpul antara batang merupakan sambungan tegar (Weaver dan Gare, 1986, hal.2). Gaya yang bekerja pada portal dan translasinya terletak pada bidang struktur; vektor momen seluruh kopel luar yang bekerja pada portal tegak lurus bidang tersebut. Resultan tegangan dalam (*internal*) di suatu

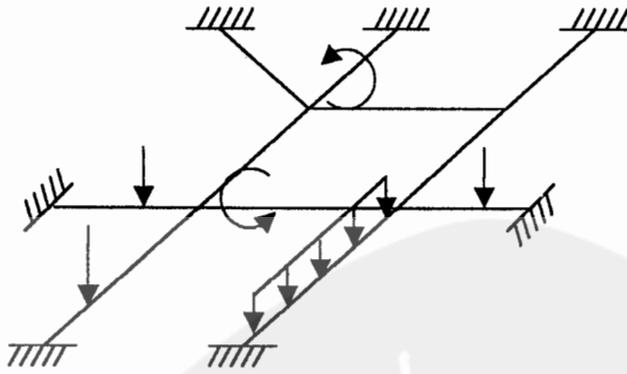
penampang batang portal bidang secara umum terdiri atas momen lentur, gaya geser dan gaya aksial. Bentuk portal bidang secara umum dapat dilihat pada gambar 2.4.



Gambar 2.4. Portal bidang

### 2.1.5. Balok silang

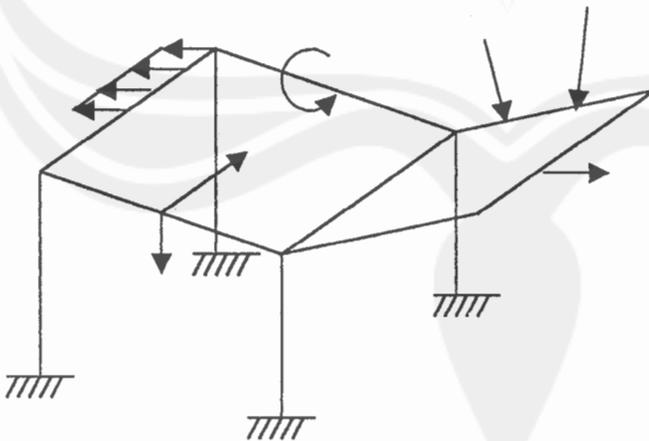
Balok silang adalah struktur bidang yang dibentuk oleh balok menerus yang saling bertemu atau bersilang (Weaver dan Gare, 1986, hal.2). Pada kasus terakhir sambungan antara batang biasanya dianggap sendi, sedangkan pada kasus pertama sambungannya dianggap tegar. Berbeda dengan portal bidang yang gaya luarnya berada dalam bidang struktur, dan vektor momen seluruh kopel luar berada dalam bidang balok silang. Arah beban seperti ini dapat menimbulkan puntir dan lenturan pada sejumlah batang. Penampang lintang setiap batang dianggap memiliki dua sumbu simetri, sehingga lenturan dan puntir tidak saling bergantung satu sama lain. Bentuk balok silang secara umum dapat dilihat pada gambar 2.5.



Gambar 2.5. Balok silang

### 2.1.6. Portal ruang

Portal ruang merupakan jenis struktur yang paling umum karena letak titik kumpul, arah batang, atau arah bebannya tidak dibatasi. Setiap batang portal ruang dapat memikul gaya aksial, momen puntir, momen lentur dalam kedua arah sumbu utama penampang lintang, dan gaya geser dalam kedua arah sumbu utama (Weaver dan Gare, 1986, hal.2). Penampang lintang batang dianggap memiliki dua sumbu simetris, seperti pada kasus balok silang. Bentuk portal ruang secara umum dapat dilihat pada gambar 2.6.



Gambar 2.6. Portal ruang

## 2.2. Tinjauan Metoda Kekakuan

Metoda untuk menganalisa struktur rangka ada dua macam, yaitu : Metoda Gaya (*flexibility method*), dan Metoda Kekakuan (*stiffness method*) yang menggunakan matriks untuk analisis struktur rangka (*framed structure*) dengan bantuan komputer, kedua struktur tersebut dapat digunakan/diterapkan pada semua jenis struktur. Dalam pemanfaatannya untuk komputasi, Metoda Kekakuan lebih sesuai dalam menganalisa struktur pada komputer, karena setelah metoda analisis struktur ditentukan, pertimbangan teknis lebih lanjut tidak lagi diperlukan (Weaver dan Gere, 1986, hal. 96). Disini terdapat perbedaan dengan metoda gaya, walaupun kedua metoda ini sama bentuk matematisnya. Pada metoda gaya besaran yang tidak diketahui adalah gaya kelebihan (*redundant*) yang dipilih secara sembarang. Sebaliknya dalam metoda kekakuan, yang tidak diketahui adalah perpindahan titik kumpul yang tertentu secara otomatis. Jadi jumlah yang tidak diketahui dalam metoda kekakuan sama dengan derajat ketidaktentuan (*indeterminacy*) kinematis struktur (Weaver dan Gere, 1986, hal. 96).

Metoda kekakuan memberikan pengekangan untuk untuk mencegah pergerakan pada titik-titik kumpul, dan gaya penekang perlu dihitung. Kemudian perpindahan titik kumpul dibiarkan terjadi, sehingga gaya pengekang fiktif tersebut menjadi nol. Dengan diketahuinya perpindahan titik kumpul, gaya pada struktur ditentukan dengan superposisi pengaruh masing-masing perpindahan (Ghali dan Neville, 1986, hal. 49).

Metoda kekakuan pertama kali dikembangkan dari superposisi gaya untuk koordinat perpindahan bebas. Kemudian metoda ini diformalisasi dan diperluas

dengan memakai matriks kesepadanan (*compatibility*) dan konsep gaya kerja maya (*virtual*). Pada pendekatan kerja maya matriks kekakuan titik kumpul (*joint stiffness*) yang lengkap dirakit dengan perkalian tiga matriks, walaupun versi formal tersebut menarik dan beraturan, tetapi membutuhkan matriks kesepadanan yang besar dan jarang (*sparse*). Selain itu, elemen matriks ini tidak mudah dinilai dengan tepat. Baik cara pembentukan matriks diatas ataupun perakitan dengan proses perkalian tidak sesuai untuk diprogram pada komputer. Metodologi yang baik adalah menarik ide dari pendekatan tersebut dan menambahkan beberapa teknik yang berorientasi pada komputer, sehingga didapatkan suatu cara yang disebut metoda kekakuan langsung (*direct stiffness method*) yang lebih mudah untuk diprogram pada komputer (Weaver dan Gere, 1986, hal. 148).

### 2.2.1 Metoda kekakuan langsung

Secara umum langkah perhitungan dengan metoda kekakuan langsung dapat diuraikan sebagai berikut :

- a. Pembentukan matriks kekakuan elemen dan vektor beban.
- b. Pembentukan matriks kekakuan global dan vektor beban.
- c. Penyelesaian persamaan linier simultan.
- d. Evaluasi gaya-gaya pada titik kumpul.

Formulasi permasalahan pada metoda kekakuan langsung (*direct stiffness method*) didasarkan pada hubungan antar variabel yang berpengaruh (Supartono dan Boen, 1980, hal. 65), yaitu:

a. Kompabilitas

Kompabilitas adalah deformasi pada elemen struktur pada batang (pada koordinat lokal) dan perpindahan titik kumpul (pada koordinat global)

$$d = T \cdot D \quad (2-1)$$

Pada persamaan diatas  $d$  adalah deformasi dari elemen struktur,  $T$  adalah matriks transformasi dan  $D$  adalah perpindahan pada titik kumpul.

b. Constitutive equation

*Constitutive equation* merupakan hubungan antara gaya-gaya dalam dan deformasi internal.

$$S = k \cdot d \quad (2-2)$$

Pada persamaan diatas  $S$  adalah gaya internal yang terjadi dan  $k$  merupakan matriks kekakuan batang (dalam koordinat lokal).

c. Keseimbangan

Hubungan antara beban luar dan gaya-gaya dalam

$$R = B \cdot S \quad (2-3)$$

Pada persamaan diatas  $R$  adalah beban luar yang bekerja,  $B$  adalah matriks transformasi gaya.

Dapat dibuktikan berdasar prinsip energi (Weaver dan Gere, 1986, hal. 30) bahwa

$$B = T^T$$

Dengan demikian persamaan (2-3) diatas menjadi  $R = T^T \cdot S \quad (2-4)$

Substitusikan berturut-turut pers. (3-1) dan (3-2) pada pers. (3-4) maka diperoleh

$$R = T^T \cdot k \cdot d$$

$$R = T^T \cdot k \cdot T \cdot D, \text{ sehingga}$$

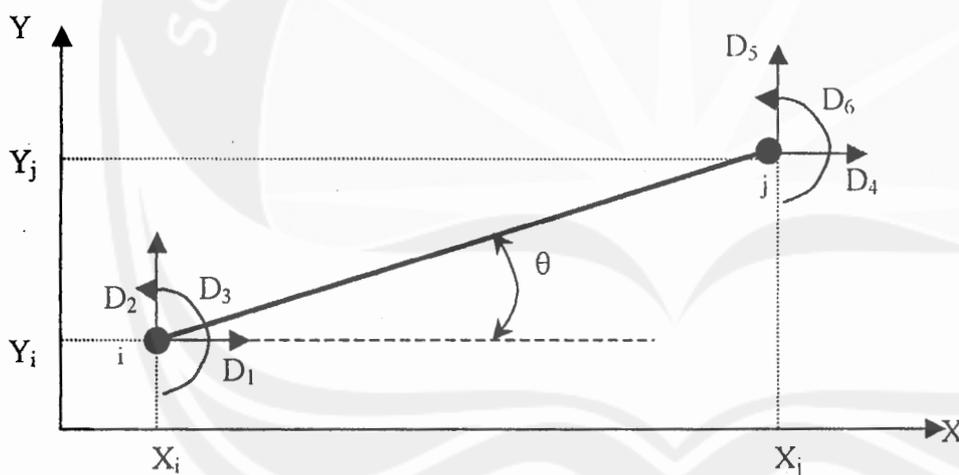
$$R = K \cdot D \quad (2-5)$$

Dengan,  $K = T^T \cdot k \cdot T \quad (2-6)$

Pada persamaan di atas  $K$  adalah matriks kekakuan batang (dalam koordinat global).

### 2.2.2 Penerapan metoda kekakuan kangsung pada portal bidang

Untuk Mencari matriks kekakuan pada portal bidang, maka terlebih dulu tiap-tiap balok dan kolom dimodelkan menjadi sebuah elemen. Pada setiap elemen terdapat dua buah titik simpul, dimana pada setiap titik simpul terjadi 3 buah perpindahan, yaitu dua buah translasi dan sebuah rotasi sebagaimana yang tampak pada gambar 2.7.



Gambar 2.7. Perpindahan pada metoda kekakuan langsung

Portal bidang sesuai dengan formulasi yang dijelaskan pada sub bab 2.2.1 di atas, yaitu sesuai dengan persamaan (2-1) sampai dengan persamaan (2-6), dengan matriks transformasi pada rumus (2-7) di bawah ini :

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

$$C = \cos \theta = (X_j - X_i) / L \quad S = \sin \theta = (Y_j - Y_i) / L$$

Pada persamaan diatas  $X_i$  dan  $X_j$  adalah koordinat ujung batang i dan j terhadap sumbu X,  $Y_i$  dan  $Y_j$  adalah koordinat ujung batang i dan j terhadap sumbu Y dan  $L$  adalah panjang batang.

Matriks kekakuan batang (dalam koordinat lokal) pada portal bidang diformulasikan pada rumus (2-8) di bawah ini :

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

Pada persamaan diatas  $k$  adalah matriks kekakuan batang dalam koordinat lokal,  $A$  adalah luas penampang batang,  $E$  adalah modulus elastisitas batang dan  $I$  adalah inersia dari batang.

Setelah didapat matriks kekakuan batangnya (dalam koordinat lokal) pada persamaan 2.8 maka dapat disusun matriks kekakuan batang pada portal bidang

(dalam koordinat global) seperti yang dapat dilihat pada tabel 2.1, dimana pada tabel tersebut  $K$  adalah matriks kekakuan batang dalam koordinat global.

### **2.3. Sub Struktur**

Analisis struktur dengan metoda kekakuan menghasilkan suatu persamaan kekakuan seperti pada persamaan (2-5) diatas dimana bagian terpenting dari penggunaan komputer adalah untuk menyelesaikan suatu permasalahan dengan persamaan tersebut. Untuk mengatasi permasalahan struktur dengan banyak DOF (*degrees of freedom*), maka ada beberapa metoda yang dapat digunakan (Mukhopadhyay, 1993, hal. 168) antara lain *the frontal solution technique*, *sparse matrix techniques* dan *sub structure technique*. Pada penulisan tugas akhir ini, metoda yang digunakan adalah teknik sub struktur.

Metoda sub struktur juga dikenal dengan nama metoda perbagian (*method of part*) dan juga *method of tearing (diakoptics)*. Metoda sub struktur ini diperkenalkan pertama kali oleh Gabriel Kron (Kardestuncer, 1974, hal. 361). Pendekatan dalam menganalisis suatu sistem struktur dengan menggunakan teknik sub struktur adalah membagi suatu struktur utuh menjadi beberapa sub struktur. Pembagian sub struktur tersebut dapat diambil dari setiap bagian dari struktur. Akibat dari pembagian tersebut maka perhitungan dapat diselesaikan dengan analisis perbagian sub struktur dari keseluruhan sistem struktur yang dipartisi.

Analisis dengan sub struktur dapat aplikasikan dengan metoda kekakuan dan *flexibility method* (Rubinstein, 1966, hal. 266), dimana pada penulisan tugas akhir ini penulis mengaplikasikan teknik sub struktur dengan metoda kekakuan.

Tabel 2.1. Matriks kekakuan struktur portal bidang dalam tata koordinat global

$$[K] = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2 & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)CS & -\frac{6EI}{L^2}S & -\left(\frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)CS & -\frac{6EI}{L^2}S \\
 \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)CS & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12EI}{L^3}C^2 & \frac{6EI}{L^2}C & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)CS & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12EI}{L^3}C^2 & \frac{6EI}{L^2}C \\
 -\frac{6EI}{L^2}S & \frac{6EI}{L^2}C & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}S & -\frac{6EI}{L^2}C & \frac{2EI}{L} \\
 -\left(\frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)CS & \frac{6EI}{L^2}S & \frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2 & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)CS & -\frac{6EI}{L^2}S \\
 \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)CS & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12EI}{L^3}C^2 & \frac{6EI}{L^2}C & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)CS & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12EI}{L^3}C^2 & \frac{6EI}{L^2}C \\
 -\frac{6EI}{L^2}S & \frac{6EI}{L^2}C & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}S & -\frac{6EI}{L^2}C & \frac{2EI}{L}
 \end{bmatrix}$$

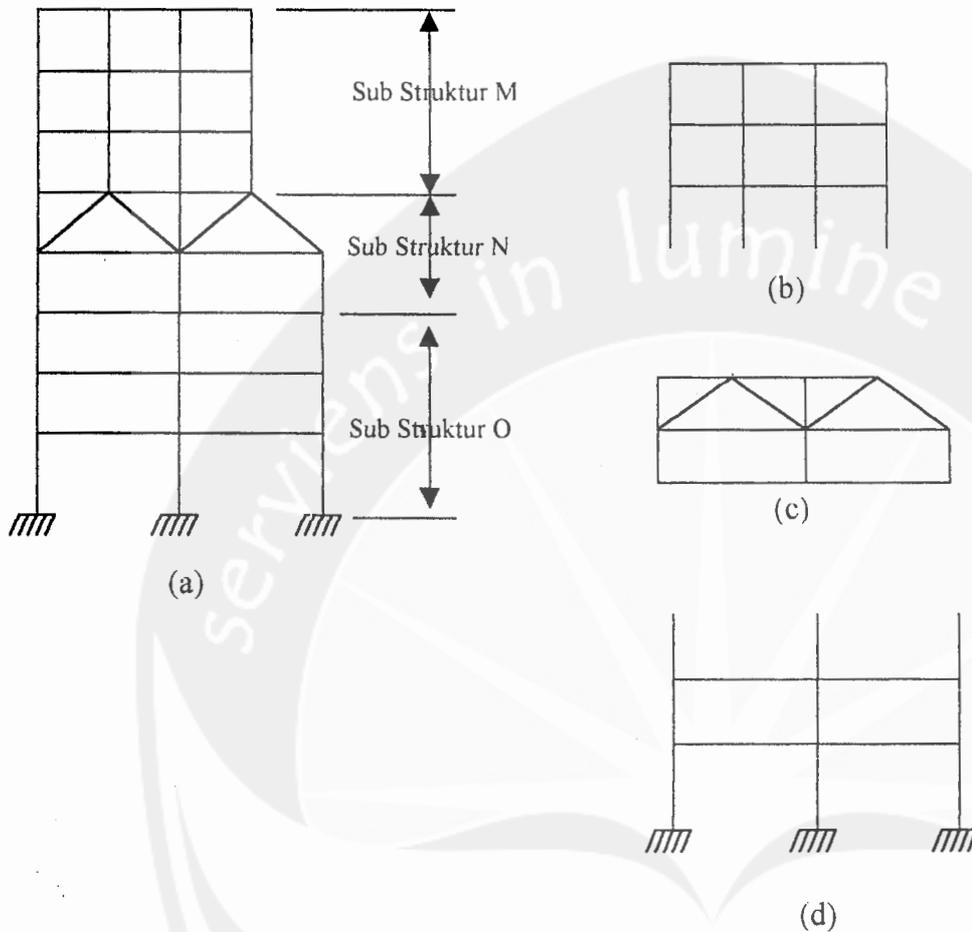
Secara umum langkah dalam analisis dengan teknik sub struktur dapat diuraikan (Rubinstein, 1966, hal. 266) sebagai berikut :

- a. Mendefinisikan dua system koordinat, yaitu lokal dan global.
- b. Memilih elemen/batang, koordinat elemen dan pembentukan matriks kekakuan elemen, serta membagi elemen-elemen tersebut dalam pembagian sub struktur.
- c. Menentukan matriks transformasi dari masing-masing sub struktur.
- d. Pembentukan matriks kekakuan sub struktur.
- e. Pembentukan vektor beban pada masing-masing sub struktur.
- f. Penyelesaian persamaan untuk menentukan perpindahan pada titik simpul pertemuan sub struktur.
- g. Penyelesaian persamaan untuk menentukan perpindahan pada keseluruhan titik simpul struktur.

### **2.3.1. Konsep dasar sub struktur**

Konsep dasar sub struktur adalah membagi struktur semula menjadi beberapa sistem struktur yang lebih kecil. Setiap bagian dari struktur yang dipecahkan tersebut dikenal sebagai sub struktur (Mukhopadhyay, 1993, hal. 169). Struktur dianalisis perbagian sub struktur dengan menurunkan matriks kekakuan pada masing-masing sub struktur dengan anggapan bahwa masing-masing sub struktur tersebut merupakan suatu struktur yang utuh lalu hasil analisis perbagian sub struktur tersebut dikombinasikan sesuai dengan struktur keseluruhannya (McGuire dan Gallagher, 1979, hal. 331). Gambar 2.8 memperlihatkan sebuah portal bidang yang kemudian dibagi menjadi 3 buah sub

struktur, yaitu sub struktur M seperti pada gambar 2.8.b, sub struktur N seperti pada 2.8.c dan sub struktur O seperti pada gambar 2.8.d.



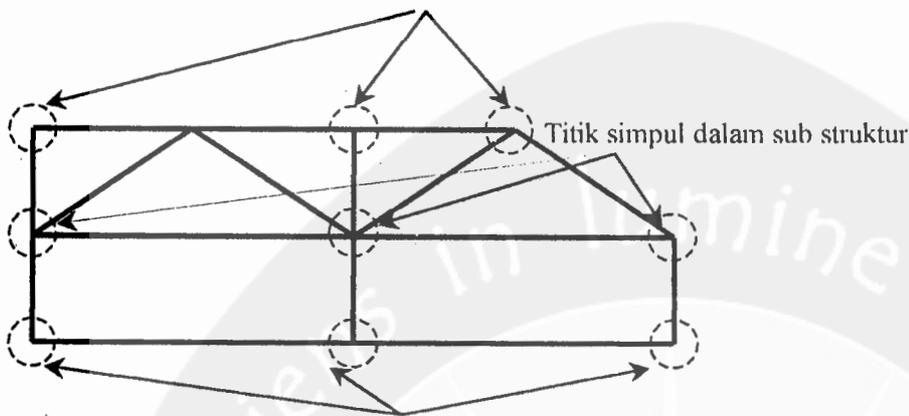
Gambar 2.8. Analisis sub struktur (a) Portal bidang (b) Sub struktur M  
(c) Sub struktur N (d) Sub struktur O

Akibat adanya beberapa sub struktur maka titik simpul dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu :

1. Titik simpul pada pertemuan antar sub struktur, yang diberi notasi *subscript c*.
2. Titik simpul dalam sub struktur, yang diberi notasi *subscript b*.

Gambar 2.9 memperlihatkan penjelasan tentang titik simpul pada pertemuan dan titik simpul dalam sub struktur N.

Titik simpul pada pertemuan antar sub struktur



Titik simpul pada pertemuan antar sub struktur

Gambar 2.9. Titik simpul dalam dan titik simpul pertemuan pada sub struktur N

Ilustrasi pada gambar 2.9, yaitu pada sub struktur N, persamaan kekakuan sub struktur dapat dipartisi dengan memisahkan perpindahan pada titik simpul dalam sub struktur dan pertemuan antar sub struktur, yang dapat dinyatakan seperti pada persamaan (2-9).

$$\begin{Bmatrix} P_b^N \\ P_c^N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{bb}^N & K_{bc}^N \\ K_{cb}^N & K_{cc}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_b^N \\ \Delta_c^N \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

Pada persamaan (2-9) diatas  $P_b^N$  adalah beban yang bekerja pada titik simpul dalam sub struktur N,  $P_c^N$  adalah beban yang bekerja pada titik simpul pertemuan sub struktur N,  $\Delta_b^N$  adalah perpindahan yang terjadi pada titik simpul dalam sub struktur N,  $\Delta_c^N$  adalah perpindahan yang terjadi pada titik simpul pertemuan sub struktur N dan  $K_{bb}^N$ ,  $K_{cc}^N$ ,  $K_{cb}^N$  dan  $K_{bc}^N$  adalah matriks yang dipartisi dari matriks kekakuan sub struktur N.

Ekspansi bagian atas dari persamaan (2-9) memberikan :

$$\begin{aligned} [K_{bb}^N] \{\Delta_b^N\} + [K_{bc}^N] \{\Delta_c^N\} &= \{P_b^N\} \\ [K_{bb}^N] \{\Delta_b^N\} &= \{P_b^N\} - [K_{bc}^N] \{\Delta_c^N\} \\ \{\Delta_b^N\} &= [K_{bb}^N]^{-1} \cdot \{P_b^N\} - [K_{bb}^N]^{-1} \cdot [K_{bc}^N] \{\Delta_c^N\} \end{aligned} \quad (2-10)$$

Ekspansi bagian bawah dari persamaan (2-9) memberikan :

$$[K_{cb}^N] \{\Delta_b^N\} + [K_{cc}^N] \{\Delta_c^N\} = \{P_c^N\} \quad (2-11)$$

Persamaan (2-10) disubstitusikan ke persamaan (2-11) menjadi :

$$\begin{aligned} [K_{cb}^N] \left( [K_{bb}^N]^{-1} \cdot \{P_b^N\} - [K_{bb}^N]^{-1} \cdot [K_{bc}^N] \{\Delta_c^N\} \right) + [K_{cc}^N] \{\Delta_c^N\} &= \{P_c^N\} \\ \left( [K_{cb}^N] - [K_{cb}^N] [K_{bb}^N]^{-1} [K_{bc}^N] \right) \{\Delta_c^N\} &= \{P_c^N\} - [K_{cb}^N] [K_{bb}^N]^{-1} \cdot \{P_b^N\} \end{aligned} \quad (2-12)$$

Bila

$$[\hat{K}_{cc}^N] = [K_{cc}^N] - [K_{cb}^N] [K_{bb}^N]^{-1} [K_{bc}^N] \quad (2-13)$$

$$\{R_c^N\} = [K_{cb}^N] [K_{bb}^N]^{-1} \cdot \{P_b^N\} \quad (2-14)$$

$$\{\hat{P}_c^N\} = \{P_c^N\} - \{R_c^N\} \quad (2-15)$$

Maka persamaan (2-12) menjadi

$$[\hat{K}_{cc}^N] \{\Delta_c^N\} = \{\hat{P}_c^N\} \quad (2-16)$$

Sub struktur M dan sub struktur O pada gambar 2.8 dianalisis seperti pada persamaan (2-9) sampai pada persamaan (2-16) diatas dan kemudian hasil analisis digabung, sehingga didapatkan hasil dari perpindahan pada titik simpul keseluruhan struktur seperti yang diperlihatkan pada persamaan (2-17).

$$\Delta_c = [K_{cc}^N]^{-1} \cdot \{\hat{P}_c^N\} \quad (2-17).$$

Pada persamaan (2-17)  $\{\hat{K}_{cc}\}$  adalah superposisi dari  $\{\hat{K}_{cc}^M\} + \{\hat{K}_{cc}^N\} + \{\hat{K}_{cc}^O\}$  dan  $\{\hat{p}_c\}$  adalah superposisi dari  $\{\hat{p}_c^M\} + \{\hat{p}_c^N\} + \{\hat{p}_c^O\}$ .

Berdasar formulasi pada persamaan (2-17), hasil yang didapat dimasukkan pada persamaan (2-10) untuk mendapatkan didapat besarnya perpindahan pada titik simpul dalam sub struktur. Berdasarkan formulasi diatas kemudian dibuat program komputer, yang dapat digunakan untuk menganalisis struktur portal bidang.

