BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Hitungan Gaya Kontrol

Gaya kontrol yang akan diberikan pada struktur harus dihitung terlebih dahulu. Hitungan gaya kontrol dapat dilakukan dalam 2 pendekatan sebagai berikut ini (Ogata, 1990 ; Meirovitch, 1990 ; Nise, 1995).

1. Teori klasik

   Berdasarkan teori ini persamaan gerak struktur dinyatakan dalam bentuk tranformasi Laplace. Transformasi ini berfungsi untuk menentukan fungsi transfer, yang menunjukkan hubungan antara input dan output sistem. Metode perhitungan yang menggunakan teori klasik ini antara lain *Root Locus*, *Nyquist Plots*, *Bode diagram* (Ogata, 1990 ; Driels, 1996).

2. Teori modern

   Pada teori ini konsep dasar yang digunakan adalah membuat model matematik dari suatu sistem. Model matematik ini disebut sebagai *state space repesentation* (Ogata, 1990 ; Ogata, 1998 ; Vaccaro, 1995). Ada banyak metode yang digunakan berdasarkan teori modern ini antara lain *Optimal Control* (Ogata, 1990 ; Yang, 1975), *Pole Placement*, *Independent Modal Space Control (IMSC)*, *Bounded State Control* (Soong, 1988 ; Yang dan Soong, 1988). *Linear Quadratic Regulator* adalah perhitungan *optimal control*, dalam hal ini yang dioptimalkan adalah suatu *quadratic perfomance index* (Ogata, 1990 ; Yang, 1975).

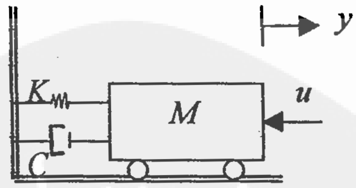
Pada desain kontrol sistem digunakan beberapa batasan dan anggapan yang bisa menimbulkan penyimpangan dari perilaku ideal. *Perfomance index* adalah suatu angka yang menunjukkan seberapa bagus perilaku aktual dari sistem dibandingkan dengan perilaku ideal. Pada banyak kasus perilaku sistem dioptimalkan dengan memilih vektor kontrol sedemikian rupa sehingga *perfomance index* diminimalkan (atau dimaksimalkan) sesuai dengan kasus yang dihadapi (Ogata, 1990 ; Nise, 1995).

Beberapa penelitian telah dilakukan untuk membandingkan efektivitas dari metode perhitungan yang satu dengan yang lain serta membandingkan efektivitas penggunaan aktuator yang satu dengan yang lain (Wang, 1983 ; Kobori, 1988 ; Pantelides, 1990 ; Shing dkk, 1996 ; Singh dkk, 1997).

2.2. *State Space Representation*

Sistem yang kompleks dengan banyak *input* dan *output*, bahkan beberapa variabel merupakan fungsi terhadap waktu memerlukan model matematik yang bisa menggambarkan kompleksitas sistem tersebut dengan akurasi yang baik (Ogata, 1998 ; Meirovitch, 1990). *State space representation* merupakan model matematik yang dapat mengatasi masalah ini. *State space representation* pada struktur sipil bertujuan merubah n-persamaan diferensial order kedua menjadi 2n-persamaan diferensial order pertama dengan *n* adalah *degree of freedom* struktur (Ogata, 1998).

Ditinjau struktur *single degree of freedom* yang diberi gaya kontrol seperti terlihat pada gambar 2.1.



Gambar 2.1. Struktur *single degree of freedom* yang diberi gaya kontrol

Dengan M = massa struktur, K = kekakuan, C = redaman struktur, y = *displacement*, dan u = gaya kontrol, maka diperoleh persamaan gerak sruktur sebagai berikut :

$$M\,\ddot{y} + C\,\dot{y} + Ky = u \tag{2-1}$$

dipilih variabel

$$x_1 = y \quad \text{dan} \quad x_2 = \dot{y} \tag{2-2}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} \rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 &= \dot{y} \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{y} \end{aligned} \tag{2-3}$$

dari persamaan gerak struktur

$$\begin{aligned} M\,\ddot{y} + C\,\dot{y} + Ky &= u \\ \ddot{y} &= -\frac{Ky}{M} - \frac{C\,\dot{y}}{M} + \frac{u}{M} \end{aligned} \tag{2-4}$$

substitusi persamaan (2-2) dan (2-3) pada persamaan (2-4) diperoleh

$$\dot{x}_2 = -M^{-1}Kx_1 - M^{-1}Cx_2 + M^{-1}u \tag{2-5}$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{Bmatrix} u \tag{2-6}$$

atau

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \tag{2-7}$$

selanjutnya nilai *output* z dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{2-8}$$

atau

$$z = \boldsymbol{C}_z \boldsymbol{x} + \boldsymbol{Du} \tag{2-9}$$

dengan $\boldsymbol{D} = [0]$

Dengan demikian bentuk umum *state space representation* untuk n-*degree of freedom* adalah sebagai berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \tag{2-10}$$

$$z = \boldsymbol{C}_z \boldsymbol{x} + \boldsymbol{Du} \tag{2-11}$$

Keterangan :

$\boldsymbol{x}$ = *state* variabel dengan 2n-vektor kolom yang menggambarkan *displacement* dan kecepatan.

z = 2n-*output* vektor

$\boldsymbol{A}$ = 2nx2n matiks sistem

$$= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{B}$ = 2nxm matriks *input*, menunjukkan lokasi aktuator

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}$$

Cz = mx2n matriks *output*

D = matriks transmisi langsung

$= [0]$

2.3. *Linear Quadratic Regulator (LQR) / Quadratic Optimal Control*

2.3.1. *Linear quadratic perfomance index*

Efektivitas dari suatu kontrol sistem diukur oleh suatu *perfomance index* yang terdiri atas (Yang, 1975) :

a. Faktor yang berhubungan dengan keamanan struktur.

   Jika ***e*** = keadaan ideal dan ***x*** = keadaan aktual maka (***e-x***) adalah suatu vektor *error*. Sehingga jika fungsi *error* ingin diminimalkan maka

$$J = \int_0^T (e - x)^T Q (e - x) dt \tag{2-12}$$

   Jika $T = \infty$ dan keadaan yang diinginkan adalah nilai ***e*** = *0* maka

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x) dt \tag{2-13}$$

   dengan ***Q*** adalah matriks 2nx2n yang dipilih sedemikian rupa sehingga nilai *error* dari sistem menjadi minimal.

b. Faktor ekonomi

   Gaya kontrol ***u*** yang menggambarkan kebutuhan energi *input* untuk mengontrol getaran struktur harus sekecil mungkin karena keterbatasan alat kontrol. Selain itu nilai gaya kontrol yang terlalu besar juga bisa mengganggu stabilitas struktur. Oleh sebab itu dibutuhkan suatu kriteria untuk membatasi nilai $\boldsymbol{u}$.

Untuk itu digunakan

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{u})dt \qquad (2\text{-}14)$$

dengan $\boldsymbol{R}$ adalah matriks mxm yang dipilih sedemikian rupa sehingga kebutuhan gaya kontrol menjadi minimal.

Dalam kenyataannya jika sistem bisa dirancang dengan kemungkinan kegagalan minimal maka dibutuhkan gaya kontrol yang sangat besar. Di sisi lain, pada saat sistem dirancang tanpa gaya kontrol ($\boldsymbol{u}$ = 0), maka kemungkinan kegagalan menjadi maksimal. Dengan kata lain, kedua hal ini tidak bisa diminimalkan sekaligus. Konsekuensinya, kompromi terbaik antara kedua aspek ini diperoleh suatu *quadratic perfomance index* berikut (Yang, 1975) :

$$J = \int_0^\infty \{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\}dt \qquad (2\text{-}15)$$

sedemikian rupa sehingga minimal, dengan

$\boldsymbol{Q}$ = matriks 2nx2n, menggambarkan efektivitas keamanan, positif definitif (positif semi-definitif) hermitian atau matriks simetris.

$\boldsymbol{R}$ = matriks mxm, menggambarkan efektivitas nilai gaya kontrol (pertimbangan ekonomi), positif definitif hermitian atau matriks simetris.

Pemilihan $\boldsymbol{Q}$ dan $\boldsymbol{R}$ secara acak menimbulkan kesan bahwa usaha meminimalkan *perfomance index* yang acak ini tidak memberikan jaminan apa-apa, tetapi dari penelitian telah dibuktikan bahwa pendekatan ini tetap menghasilkan sistem yang stabil (Ogata, 1990).

Jika nilai $\boldsymbol{Q}$ besar akan dihasilkan gaya kontrol yang besar yang mampu mengurangi respon dalam jumlah besar dengan cepat (faktor keamanan lebih penting). Jika $\boldsymbol{R}$ besar akan dihasilkan gaya kontrol yang sangat kecil (faktor ekonomi lebih penting).

Dengan demikian, dengan memvariasikan nilai $\boldsymbol{Q}$ dan $\boldsymbol{R}$ bisa diatur sistem kontrol yang mampu mengurangi respon secara cepat dan hasil yang bagus dengan gaya kontrol yang besar, atau pengurangan respon yang kecil dan lambat dengan gaya kontrol yang kecil. Kedua hal ini tetap dinamakan optimal. J menjadi tidak optimal jika pengurangan respon yang sedikit dibutuhkan nilai gaya kontrol yang besar.

2.3.2. Desain dengan *linear quadratic regulator*

Ditinjau *state space representation* pada persamaan (2-10)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

dan *quadratic perfomance index* pada persamaan (2-15)

$$J = \int_0^\infty \{x^T Qx + u^T Ru\}dt$$

misalkan nilai $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{kx}$ maka

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - Bkx \\ \dot{x} &= (A - Bk)x \end{aligned} \qquad (2\text{-}16)$$

dan

$$J = \int (x^T Qx + u^T Ru)dt$$
$$J = \int (x^T Qx + x^T k^T Rkx)dt \qquad (2\text{-}17)$$
$$J = \int x^T (Q + k^T Rk)xdt$$

misalkan

$$x^T (Q + k^T Rk)x = -\frac{d}{dt}(x^T Px) \qquad (2\text{-}18)$$

diperoleh

$$x^T (Q + k^T Rk)x = -\dot{x}^T Px - x^T P\dot{x} \qquad (2\text{-}19)$$

substitusi persamaan (2-16) pada persamaan (2-19) diperoleh

$$x^T (Q + k^T Rk)x = -x^T [(A - Bk)^T P + P(A - Bk)]x \qquad (2\text{-}20)$$

jika persamaan (2-20) bernilai benar untuk setiap x maka persamaan (2-20) bisa ditulis dalam bentuk

$$(A - Bk)^T P + P(A - Bk) = -(Q + k^T Rk) \qquad (2\text{-}21)$$

jika (A-Bk) adalah matriks stabil maka matriks P yang positif definitif (simetris) akan memenuhi persamaan (2-21) ini.

Asumsikan $R = T^T T$ dengan T adalah matriks *nonsingular*, maka persamaan (2-21) bisa ditulis dalam bentuk

$$(A^T - k^T B^T)P + P(A - Bk) + Q + k^T T^T Tk = 0 \qquad (2\text{-}22)$$

atau dituliskan dalam bentuk lain

$$A^T P + PA + [Tk - (T^T)^{-1} B^T P]^T [Tk - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \qquad (2\text{-}23)$$

Meminimalkan J terhadap $\boldsymbol{k}$ memerlukan usaha meminimalkan

$$\boldsymbol{x}^T[\boldsymbol{Tk} - (\boldsymbol{T}^T)^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{Tk} - (\boldsymbol{T}^T)^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}]\boldsymbol{x} \tag{2-24}$$

terhadap $\boldsymbol{k}$

Nilai minimum terjadi jika persamaan (2-24) = 0, atau pada saat

$$\boldsymbol{Tk} = (\boldsymbol{T}^T)^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} \tag{2-25}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{T}^T)^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} \end{aligned} \tag{2-26}$$

Dengan demikian jika $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{kx}$ maka

$$\boldsymbol{u} = \quad \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Px} \tag{2-27}$$

dengan nilai $\boldsymbol{P}$ memenuhi persamaan Riccati berikut

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PA} - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = 0 \tag{2-28}$$

Persamaan Riccati ini bisa diselesaikan dengan mensubstitusikan matriks $\boldsymbol{P}$ yang simetris (Ogata, 1990 ; Yang, 1975 ; Meirovitch, 1990).

2.4. Standar Perbandingan

Seperti yang telah diutarakan di atas, kontrol aktif menjadi efektif jika dihasilkan reduksi respon yang maksimal dengan gaya kontrol minimal. Oleh sebab itu untuk mengevaluasi efektivitas dari mekanisme kontrol yang berbeda digunakan *Drift Reduction Factor* (*DRF*) dan *Normalized Control Force* (*NCF*) sebagai berikut :

$$DRF = \frac{\Delta^u_{\max} - \Delta^c_{\max}}{\Delta^u_{\max}} \tag{2-29}$$

servens in lumine veritatis

$$NCF = \frac{u_{\max}}{1Mr\,\ddot{x}_{0,\max}} \tag{2-30}$$

Keterangan :

$\Delta^{u}_{\max}$ = maksimal *story drift* pada kondisi tidak terkontrol

$\Delta^{c}_{\max}$ = maksimal *story drift* pada kondisi terkontrol

$u_{\max}$ = nilai maksimal dari gaya kontrol

$\ddot{x}_{0,\max}$ = percepatan tanah maksimal

Mr = massa struktur

Normalisasi yang terdapat pada persamaan (2-30) menghilangkan pengaruh percepatan tanah dan massa struktur pada kebutuhan gaya kontrol. Hal ini memungkinkan suatu perbandingan yang objektif antara suatu mekanisme kontrol dengan mekanisme yang lain (Shing dkk, 1996).