BAB II

ANALISIS STRUKTUR

II.1. Tinjauan Umum

Metode kekakuan merupakan salah satu metode untuk menganalisis struktur yang berorientasi pada matriks. Salah satu kelebihannya adalah mudah diprogram pada komputer. Pada metode kekakuan, besaran yang tidak diketahui adalah perpindahan titik kumpul struktur, jadi jumlah yang tidak diketahui dalam metode kekakuan sama dengan derajat ketidaktentuan (*indeterminacy*) kinematis struktur. Metode kekakuan dikembangakan dari persamaan keseimbangan titik kumpul, yang ditulis dalam koefisien kekakuan dan perpindahan titik kumpul yang tidak diketahui.

II.2. Metode Kekakuan

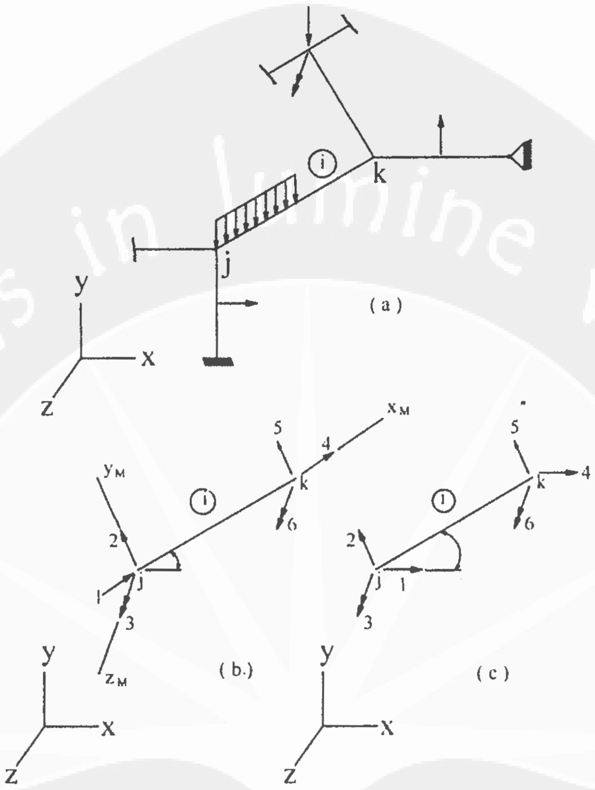
Program komputer untuk analisis struktur dengan metode kekakuan dibagi menjadi beberapa tahap (Weaver, 1996).

1. Identifikasi data struktural, informasi mengenai struktur harus dirangkai dan disimpan. Informasi ini terdiri dari jumlah batang, jumlah titik kumpul, jumlah derajat kebebasan (*degree of freedom*), letak titik kumpul struktur, sifat penampang setiap batang, dan kondisi pengekang (*restraint*) di tumpuan struktur. Dalam program komputer, semua informasi ini diberi kode menurut cara tertentu.

2. Pembentukan matriks kekakuan, yang merupakan sifat bawaan (*inherent*) struktur dan didasarkan hanya pada data struktural. Matriks kekakuan titik yang ditinjau memiliki hubungan dengan semua perpindahan titik kumpul yang mungkin, termasuk perpindahan tumpuan.
3. Identifikasi data beban, beban pada titik kumpul bisa dijadikan sebagai data *input* secara langsung pada komputer. Sedangkan beban pada batang tidak bisa secara langsung, tetapi di-*input* sebagai gaya jepit ujung akibat beban pada batang.
4. Pembentukan vektor beban, gaya jepit ujung akibat beban pada batang diubah ke beban titik kumpul ekivalen (*equivalent join load*). Beban titik kumpul ekivalen ini, kemudian dijumlahkan dengan beban titik kumpul sebenarnya untuk memperoleh keadaan struktur yang hanya dibebani di titik kumpul.
5. Perhitungan hasil, pada tahap akhir analisis semua perpindahan titik kumpul, reaksi, dan gaya ujung batang dihitung. Perhitungan gaya ujung batang dilakukan batang demi batang sebagai ganti pada struktur keseluruhan. Gaya ini dihitung dengan menggunakan matriks kekakuan batang.

II.3. Analisis Portal Bidang pada Komputer

Portal bidang dibentuk oleh batang-batang dengan sumbu simetri yang terletak pada satu bidang. Titik kumpul antar batang merupakan sambungan tegar. Gaya yang bekerja pada portal dan translasinya terletak pada bidang struktur, sedangkan momen yang bekerja pada portal, tegak lurus bidang tersebut. Resultan tegangan dalam (*internal*) di suatu penampang batang portal bidang, secara umum terdiri dari momen lentur, gaya geser, dan gaya aksial.



Gambar 2.1 Penomoran batang pada portal bidang (Weaver, 1996)

II.3.1. Identifikasi data struktural

Sebagai langkah pendahuluan dalam analisis, batang diberi nomor dari 1 sampai *m*, dan titik kumpul diberi nomer dari 1 sampai n_j, urutan nomor bersifat sembarang. Dalam analisis, deformasi aksial dan lentur diperhitungkan sehingga ada tiga perpindahan yang mungkin di setiap titik kumpul. Perpindahan di titik kumpul *j* pada gambar 2.1 bisa diberi indeks sebagai berikut :

$3j-2$ = indeks untuk translasi dalam arah x

$3j-1$ = indeks untuk translasi dalam arah y
$3j$ = indeks untuk rotasi dalam arah z ....(2.1)

Jumlah derajat kebebasan pada portal bidang dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$n = 3n_j - n_r \quad \text{.........} (2.2)$$

n = jumlah derajat kebebasan (*degree of freedom*)
n_j = jumlah titik kumpul
n_r = jumlah pengekang titk kumpul

Batang *i* pada portal bidang gambar 2.1.b memiliki nomor titik kumpul *j* dan *k* di ujung-ujungnya. Indeks perpindahannya dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut

$$\begin{array}{lll} j1 = 3j - 2 & j2 = 3j - 1 & j3 = 3j \\ k1 = 3k - 2 & k2 = 3k - 1 & k3 = 3k \end{array} \quad \text{.........} (2.3)$$

II.3.2. Matriks kekakuan batang

Elemen-elemen pada matriks kekakuan batang untuk sumbu batang merupakan aksi pengekang, yang timbul akibat perindahan di setiap ujung batang. Keenam perpindahan ujung yang diperlihatkan pada gambar 2.1.b, terdiri dari transalasi dalam arah x_m dan y_m serta rotasi dalam arah z_m, masing-masing di ujung *j* dan *k*. Matriks kekakuan batang untuk sumbu batang pada portal bidang adalah sebagai berikut

$$S_{Mi} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{-AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad \text{......} (2.4)$$

Dimana A adalah luas penampang melintang batang , E adalah modulus elastisitas baja, I adalah momen inersia batang dan L adalah bentang batang.

Selanjutnya matriks kekakuan batang dari sumbu batang ditransformasikan ke sumbu struktur. Untuk mentransformasinya diperlukan matriks transformasi rotasi R_T sebagai berikut

$$R_T = \begin{bmatrix} Cx & Cy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Cy & Cx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cx & Cy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{..........................(2.5)}$$

Dimana Cx adalah cosinus sudut α dan Cy adalah sinus sudut α.

Setelah matriks transformasi rotasi diperoleh, matriks kekakuan batang untuk sumbu struktur dapat dihitung dengan operasi sebagai berikut

$$S_{MS} = R_T^{\,T} . S_M . R_T \quad \text{..(2.6)}$$

Dimana $R_T^{\,T}$ adalah transpose dari matriks R_T dan S_M adalah matriks kekakuan batang untuk sumbu batang pada portal bidang. Bentuk matriks S_{MS} yang diperoleh dari operasi persamaan 2.6 adalah sebagai berikut

$$S_{MSi}\begin{bmatrix}
\frac{AE}{L}C^2x+\frac{12EI}{L^3}C^2y & \left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)CxCy & -\frac{6EI}{L^2}Cy & -\left(\frac{AE}{L}C^2x+\frac{12EI}{L^3}C^2y\right) & -\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)CxCy & -\frac{6EI}{L^2}Cy \\
\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)CxCy & \frac{AE}{L}C^2y+\frac{12EI}{L^3}C^2x & \frac{6EI}{L^2}Cx & -\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)CxCy & -\left(\frac{AE}{L}C^2y+\frac{12EI}{L^3}C^2x\right) & \frac{6EI}{L^2}Cx \\
-\frac{6EI}{L^2}Cy & \frac{6EI}{L^2}Cx & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}Cy & -\frac{6EI}{L^2}Cx & \frac{2EI}{L} \\
-\left(\frac{AE}{L}C^2x+\frac{12EI}{L^3}C^2y\right) & -\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)CxCy & \frac{6EI}{L^2}Cy & \frac{AE}{L}C^2x+\frac{12EI}{L^3}C^2y & \left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)CxCy & \frac{6EI}{L^2}Cy \\
-\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)CxCy & -\left(\frac{AE}{L}C^2y+\frac{12EI}{L^3}C^2x\right) & -\frac{6EI}{L^2}Cx & \left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)CxCy & \frac{AE}{L}C^2y+\frac{12EI}{L^3}C^2x & -\frac{6EI}{L^2}Cx \\
-\frac{6EI}{L^2}Cy & \frac{6EI}{L^2}Cx & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}Cy & -\frac{6EI}{L^2}Cx & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}$$

....(2.7)

II.3.3. Matriks kekakuan titik

Matriks kekakuan batang diatas, ditransfer ke matriks kekakuan titik. Untuk membentuk matriks kekakuan titik, digunakan prosedur sebagai berikut

$$(S_j)_{j1,j1} = \Sigma S_{MS} + (S_{MS11})_i$$

$$(S_j)_{j2,j1} = \Sigma S_{MS} + (S_{MS21})_i$$

$$(S_j)_{j3,j1} = \Sigma S_{MS} + (S_{MS31})_i$$

$$(S_j)_{k1,j1} = (S_{MS41})_i$$

$$(S_j)_{k2,j1} = (S_{MS51})_i$$

$$(S_j)_{k3,j1} = (S_{MS61})_i \qquad \text{(2.8)}$$

Dalam persamaan ini, tiga koefisien kekakuan pertama merupakan jumlah kontribusi dari semua batang yang bertemu di titik *j* (termasuk batang *i*). Tuga kekakuan terakhir hanya menerima kontribusi dari batang *i*. Prosedur diatas berlsku untuk kolom ke dua dan ke tiga dari $S_{MS.}$

Persamaan untuk mentransfer kolom ke empat sampai ke enam dari S_{MS} ke matriks S_j adalah sebagai berikut

$(S_j)_{j1,k1} = \quad (S_{MS14})_i$

$(S_j)_{j2,k1} = \quad (S_{MS24})_i$

$(S_j)_{j3,k1} = \quad (S_{MS34})_i$

$(S_j)_{k1,k1} = \Sigma S_{MS} + (S_{MS44})_i$

$(S_j)_{k2,k1} = \Sigma S_{MS} + (S_{MS54})_i$

$(S_j)_{k3,k1} = \Sigma S_{MS} + (S_{MS64})_i$ ....(2.9).

II.3.4. Beban di titik kumpul

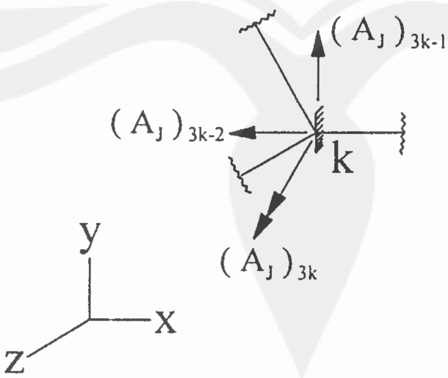
Pada tahap analisis selanjutnya vektor yang berkaitan dengan beban pada portal dibentuk. Gaya luar yang diberikan di titik kumpul dimasukkan pada vektor A_j. Gambar 2.2 memperlihatkan aksi di titik kumpul k pada portal bidang. Aksi tersebut diberi indeks sebagai berikut

$(A_j)_{3k-2}$ = komponen x dari gaya luar
$(A_j)_{3k-1}$ = komponen y dari gaya luar
$(A_j)_{3k}$ = kopel dalam arah z ....(2.10)

Jadi vektor A_j berbentuk sebagai berikut

$A_j = \{(A_j)_1, (A_j)_2, (A_j)_3, \ldots\ldots, (A_j)_{3k-2}, (A_j)_{3k-1}, (A_j)_{3k}, \ldots\ldots, (A_j)_{3nj-2},$

$(A_j)_{3nj-1}, (A_j)_{3nj}\}$ ....(2.11)



Gambar 2.2 Beban titik kumpul pada portal bidang (Weaver, 1996)

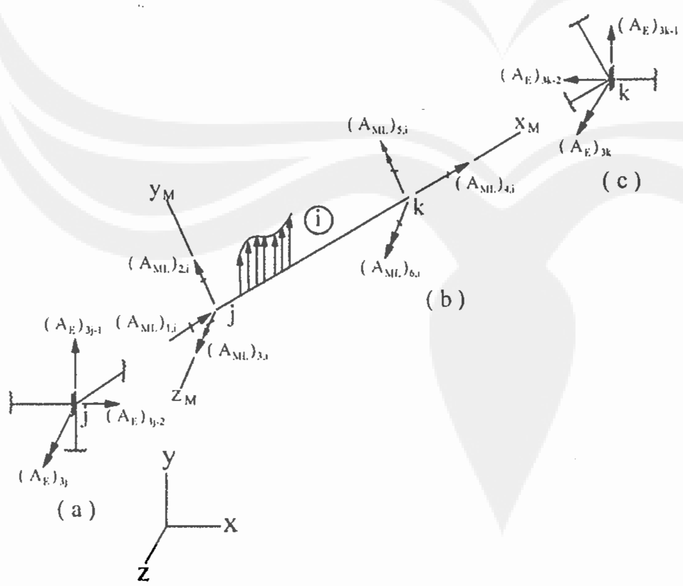
II.3.5. Beban di batang

Gambar 2.3.b mendiskripsikan gaya di ujung batang terkekang akibat beban pada batang. Gaya ujung batang i (terhadap sumbu arah batang) didefinisikan sebagai berikut

$(A_{ML})_{1,i}$ = gaya dalam arah X_M di ujung j
$(A_{ML})_{2,i}$ = gaya dalam arah Y_M di ujung j
$(A_{ML})_{3,i}$ = gaya dalam arah Z_M di ujung j
$(A_{ML})_{4,i}$ = gaya dalam arah X_M di ujung k
$(A_{ML})_{5,i}$ = gaya dalam arah X_M di ujung k
$(A_{ML})_{6,i}$ = gaya dalam arah X_M di ujung k ....(2.12)

Matriks adalah *array* berordo 6 x m, yang setiap kolomnya berisi elemen-elemen seperti dituliskan di atas untuk suatu batang. Bentuk matriksnya adalah sebagai berikut

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} (A_{ML})_{1,1} & \cdots\cdots & (A_{ML})_{1,i} & \cdots\cdots & (A_{ML})_{1,m} \\ (A_{ML})_{2,1} & \cdots\cdots & (A_{ML})_{2,i} & \cdots\cdots & (A_{ML})_{2,m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (A_{ML})_{6,1} & \cdots\cdots & (A_{ML})_{6,i} & \cdots\cdots & (A_{ML})_{6,m} \end{bmatrix} \qquad \text{........................(2.13)}$$



Gambar 2.3 Beban pada batang portal bidang (Weaver, 1996)

II.3.6. Vektor beban ekivalen

Selain transformasi matriks kekakuan batang dari sumbu batang ke sumbu struktur, konsep rotasi sumbu juga dapat digunakan untuk pembentukan vektor beban ekivalen A_E dari elemen matriks A_{ML}. Persamaannya sebgai berikut :

$$A_{MSi} = R_T^T \cdot A_{MLi} \qquad (2.14)$$

Dimana A_{MSi} adalah gaya jepit ujung dalam arah sumbu struktur dan A_{MLi} adalah kolom ke - i dari matriks gaya ujung batang A_{ML}. Suku yang dihasilkan pada persamaan (2.14) bila dibalik tandanya merupakan bagian dari A_E yang dikontribusi oleh batang ke – i, yaitu

$$(A_E)_{3j-2} = -\Sigma A_{MS} - C_{Xi}(A_{ML})_{1,i} + C_{Yi}(A_{ML})_{2,i}$$

$$(A_E)_{3j-1} = -\Sigma A_{MS} - C_{Yi}(A_{ML})_{1,i} - C_{Xi}(A_{ML})_{2,i}$$

$$(A_E)_{3j} = -\Sigma A_{MS} - (A_{ML})_{3,i}$$

$$(A_E)_{3k-2} = -\Sigma A_{MS} - C_{Xi}(A_{ML})_{4,i} + C_{Yi}(A_{ML})_{5,i}$$

$$(A_E)_{3k-1} = -\Sigma A_{MS} - C_{Yi}(A_{ML})_{4,i} - C_{Xi}(A_{ML})_{5,i}$$

$$(A_E)_{3k} = -\Sigma A_{MS} - (A_{ML})_{6,i} \qquad (2.15)$$

Beban di titik kumpul (A_j) kemudian dijumlahkan dengan beban titik kumpul ekivalen (A_E) untuk memperoleh vektor beban titik kumpul gabungan (A_C) sebagai berikut

$$(A_C) = A_j + A_E \qquad (2.16)$$

II.3.7. Penataan ulang

Untuk memisahkan suku yang berkaitan dengan perpindahan bebas struktur dari perpindahan pengekang tumpuan (*support restraint*), matriks kekakuan dan beban harus ditata ulang (*rearranged*) dan disekat (*partitioned*). Penataan ulang suku-suku ini dapat dilakukan setelah perakitan selesai. Dalam program komputer, penataan ulang ini lebih mudah dilakukan bila informasi ditransfer dari *array* batang yang kecil ke *array* struktur yang besar. Hasil penataan ulang matriks dan beban adalah sebagai berikut

$$S_j = \begin{bmatrix} S_{FF} & S_{FR} \\ S_{RF} & S_{RR} \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

$$A_C = \begin{bmatrix} A_{FC} \\ A_{RC} \end{bmatrix} \qquad (2.18)$$

Dimana *Sj* adalah hasil penataan ulang matriks kekakuan titik dan *Ac* adalah hasil penataan ulang matriks titik kumpul gabungan.

II.3.8. Perhitungan hasil

Setelah pembentukan matriks-matriks yang diperlukan selesai, disubstitusikan ke persamaan berikut untuk penyelesaian perpindahan titik kumpul dan reaksi tumpuan. Dengan formulasi sebagai berikut

$$D_F = S_{FF}^{-1}.A_{FC} \qquad (2.19)$$

$$A_R = -A_{RC} + S_{RF}.D_F \qquad (2.20)$$

Dimana D_F adalah perpindahan titik kumpul bebas, S_{FF}^{-1} adalah invers dari sub matriks S_J, A_{FC} adalah sub matriks A_C, A_R adalah reaksi tumpuan, A_{RC} adalah submatriks A_C, S_{RF} adalah submatriks S_J.

Gaya ujung batang pada portal bidang kemudian dihitung dengan persamaan sebagai berikut

$$A_{Mi} = A_{MLi} + S_{Mi}.R_{Ti}.D_{Ji} \qquad (2.21)$$

Dimana A_{MLi} adalah kolom ke - i dari matriks gaya ujung batang A_{ML}, S_{Mi} adalah matriks kekakuan batang untuk sumbu batang pada portal bidang, R_{Ti} adalah matriks transformasi rotasi, dan D_{Ji} adalah perpindahan titi kumpul.

Persamaan (2.21) bila diperluas menjadi

$$(A_M)_{1,i} = (A_{ML})_{1,i} + \frac{EAi}{L_i}\{[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}]C_{Xi} + [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}]C_{Yi}\}$$

$$(A_M)_{2,i} = (A_{ML})_{2,i} - \frac{12EI}{L_i^3}\{[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}]C_{Yi} - [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}]C_{Xi}\} + \frac{6EI}{L_i^2}[(D_J)_{j3} + (D_J)_{k3}]$$

$$(A_M)_{3,i} = (A_{ML})_{3,i} + \frac{6EI}{L_i^2}\{-[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}]C_{Yi} + [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}]C_{Xi}\} + \frac{4EI}{L_i}\left[(D_J)_{j3} + \frac{1}{2}(D_J)_{k3}\right]$$

$$(A_M)_{4,i} = (A_{ML})_{4,i} - \frac{EAi}{L_i}\{[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}]C_{Xi} + [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}]C_{Yi}\}$$

$$(A_M)_{5,i} = (A_{ML})_{5,i} + \frac{12EI}{L_i^3}\{[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}]C_{Yi} - [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}]C_{Xi}\} + \frac{6EI}{L_i^2}[(D_J)_{j3} + (D_J)_{k3}]$$

$$(A_M)_{6,i} = (A_{ML})_{6,i} + \frac{6EI}{L_i^2}\{-[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}]C_{Yi} + [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}]C_{Xi}\} + \frac{4EI}{L_i}\left[(D_J)_{j3} + \frac{1}{2}(D_J)_{k3}\right]$$

....(2.22)